

ISSN 2518-1726 (Online),
ISSN 1991-346X (Print)

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ
ҰЛТТЫҚ ҒЫЛЫМ АКАДЕМИЯСЫНЫҢ

Х А Б А Р Л А Р Ы

ИЗВЕСТИЯ

НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК
РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES
OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

**ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА
СЕРИЯСЫ**



СЕРИЯ

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ



**PHYSICO-MATHEMATICAL
SERIES**

1 (317)

**ҚАҢТАР – АҚПАН 2018 ж.
ЯНВАРЬ – ФЕВРАЛЬ 2018 г.
JANUARY – FEBRUARY 2018**

1963 ЖЫЛДЫҢ ҚАҢТАР АЙЫНАН ШЫҒА БАСТАҒАН
ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1963 ГОДА
PUBLISHED SINCE JANUARY 1963

ЖЫЛЫНА 6 РЕТ ШЫҒАДЫ
ВЫХОДИТ 6 РАЗ В ГОД
PUBLISHED 6 TIMES A YEAR

АЛМАТЫ, ҚР ҰҒА
АЛМАТЫ, НАН РК
ALMATY, NAS RK

NAS RK is pleased to announce that News of NAS RK. Series of physico-mathematical scientific journal has been accepted for indexing in the Emerging Sources Citation Index, a new edition of Web of Science. Content in this index is under consideration by Clarivate Analytics to be accepted in the Science Citation Index Expanded, the Social Sciences Citation Index, and the Arts & Humanities Citation Index. The quality and depth of content Web of Science offers to researchers, authors, publishers, and institutions sets it apart from other research databases. The inclusion of News of NAS RK. Series of physico-mathematical in the Emerging Sources Citation Index demonstrates our dedication to providing the most relevant and influential content of physics and mathematics to our community.

Қазақстан Республикасы Ұлттық ғылым академиясы "ҚР ҰҒА Хабарлары. Физика-математика сериясы" ғылыми журналының Web of Science-тің жаңаланған нұсқасы Emerging Sources Citation Index-те индекстелуге қабылданғанын хабарлайды. Бұл индекстелу барысында Clarivate Analytics компаниясы журналды одан әрі the Science Citation Index Expanded, the Social Sciences Citation Index және the Arts & Humanities Citation Index-ке қабылдау мәселесін қарастыруда. Web of Science зерттеушілер, авторлар, баспашылар мен мекемелерге контент тереңдігі мен сапасын ұсынады. ҚР ҰҒА Хабарлары. Физика-математика сериясы Emerging Sources Citation Index-ке енуі біздің қоғамдастық үшін ең өзекті және беделді физика-математика бойынша контентке адалдығымызды білдіреді.

НАН РК сообщает, что научный журнал «Известия НАН РК. Серия физико-математическая» был принят для индексирования в Emerging Sources Citation Index, обновленной версии Web of Science. Содержание в этом индексировании находится в стадии рассмотрения компанией Clarivate Analytics для дальнейшего принятия журнала в the Science Citation Index Expanded, the Social Sciences Citation Index и the Arts & Humanities Citation Index. Web of Science предлагает качество и глубину контента для исследователей, авторов, издателей и учреждений. Включение Известия НАН РК. Серия физико-математическая в Emerging Sources Citation Index демонстрирует нашу приверженность к наиболее актуальному и влиятельному контенту по физике и математике для нашего сообщества.

Б а с р е д а к т о р ы
ф.-м.ғ.д., проф., ҚР ҰҒА академигі **Ғ.М. Мұтанов**

Р е д а к ц и я а л қ а с ы:

Жұмаділдаев А.С. проф., академик (Қазақстан)
Кальменов Т.Ш. проф., академик (Қазақстан)
Жантаев Ж.Ш. проф., корр.-мүшесі (Қазақстан)
Өмірбаев У.У. проф. корр.-мүшесі (Қазақстан)
Жүсіпов М.А. проф. (Қазақстан)
Жұмабаев Д.С. проф. (Қазақстан)
Асанова А.Т. проф. (Қазақстан)
Бошқаев К.А. PhD докторы (Қазақстан)
Сұраған Д. корр.-мүшесі (Қазақстан)
Quevedo Hernando проф. (Мексика),
Джунушалиев В.Д. проф. (Қырғыстан)
Вишневский И.Н. проф., академик (Украина)
Ковалев А.М. проф., академик (Украина)
Михалевич А.А. проф., академик (Белорус)
Пашаев А. проф., академик (Әзірбайжан)
Такибаев Н.Ж. проф., академик (Қазақстан), бас ред. орынбасары
Тигиняну И. проф., академик (Молдова)

«ҚР ҰҒА Хабарлары. Физика-математикалық сериясы».

ISSN 2518-1726 (Online), ISSN 1991-346X (Print)

Меншіктенуші: «Қазақстан Республикасының Ұлттық ғылым академиясы» РҚБ (Алматы қ.)
Қазақстан республикасының Мәдениет пен ақпарат министрлігінің Ақпарат және мұрағат комитетінде
01.06.2006 ж. берілген №5543-Ж мерзімдік басылым тіркеуіне қойылу туралы куәлік

Мерзімділігі: жылына 6 рет.
Тиражы: 300 дана.

Редакцияның мекенжайы: 050010, Алматы қ., Шевченко көш., 28, 219 бөл., 220, тел.: 272-13-19, 272-13-18,
www.nauka-nanrk.kz / physics-mathematics.kz

© Қазақстан Республикасының Ұлттық ғылым академиясы, 2018

Типографияның мекенжайы: «Аруна» ЖК, Алматы қ., Муратбаева көш., 75.

Главный редактор
д.ф.-м.н., проф. академик НАН РК **Г.М. Мутанов**

Редакционная коллегия:

Джумадильдаев А.С. проф., академик (Казахстан)
Кальменов Т.Ш. проф., академик (Казахстан)
Жантаев Ж.Ш. проф., чл.-корр. (Казахстан)
Умирбаев У.У. проф. чл.-корр. (Казахстан)
Жусупов М.А. проф. (Казахстан)
Джумабаев Д.С. проф. (Казахстан)
Асанова А.Т. проф. (Казахстан)
Бошкаев К.А. доктор PhD (Казахстан)
Сураган Д. чл.-корр. (Казахстан)
Quevedo Hernando проф. (Мексика),
Джунушалиев В.Д. проф. (Кыргызстан)
Вишневский И.Н. проф., академик (Украина)
Ковалев А.М. проф., академик (Украина)
Михалевич А.А. проф., академик (Беларусь)
Пашаев А. проф., академик (Азербайджан)
Такибаев Н.Ж. проф., академик (Казахстан), зам. гл. ред.
Тигиняну И. проф., академик (Молдова)

«Известия НАН РК. Серия физико-математическая».

ISSN 2518-1726 (Online), ISSN 1991-346X (Print)

Собственник: РОО «Национальная академия наук Республики Казахстан» (г. Алматы)

Свидетельство о постановке на учет периодического печатного издания в Комитете информации и архивов
Министерства культуры и информации Республики Казахстан №5543-Ж, выданное 01.06.2006 г.

Периодичность: 6 раз в год.

Тираж: 300 экземпляров.

Адрес редакции: 050010, г. Алматы, ул. Шевченко, 28, ком. 219, 220, тел.: 272-13-19, 272-13-18,
www.nauka-nanrk.kz / physics-mathematics.kz

© Национальная академия наук Республики Казахстан, 2018

Адрес типографии: ИП «Аруна», г. Алматы, ул. Муратбаева, 75.

E d i t o r i n c h i e f

doctor of physics and mathematics, professor, academician of NAS RK **G.M. Mutanov**

E d i t o r i a l b o a r d :

Dzhumadildayev A.S. prof., academician (Kazakhstan)
Kalmenov T.Sh. prof., academician (Kazakhstan)
Zhantayev Zh.Sh. prof., corr. member. (Kazakhstan)
Umirbayev U.U. prof. corr. member. (Kazakhstan)
Zhusupov M.A. prof. (Kazakhstan)
Dzhumabayev D.S. prof. (Kazakhstan)
Asanova A.T. prof. (Kazakhstan)
Boshkayev K.A. PhD (Kazakhstan)
Suragan D. corr. member. (Kazakhstan)
Quevedo Hernando prof. (Mexico),
Dzhunushaliyev V.D. prof. (Kyrgyzstan)
Vishnevskiy I.N. prof., academician (Ukraine)
Kovalev A.M. prof., academician (Ukraine)
Mikhalevich A.A. prof., academician (Belarus)
Pashayev A. prof., academician (Azerbaijan)
Takibayev N.Zh. prof., academician (Kazakhstan), deputy editor in chief.
Tiginyanu I. prof., academician (Moldova)

News of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan. Physical-mathematical series.

ISSN 2518-1726 (Online), ISSN 1991-346X (Print)

Owner: RPA "National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan" (Almaty)

The certificate of registration of a periodic printed publication in the Committee of information and archives of the Ministry of culture and information of the Republic of Kazakhstan N 5543-Ж, issued 01.06.2006

Periodicity: 6 times a year

Circulation: 300 copies

Editorial address: 28, Shevchenko str., of. 219, 220, Almaty, 050010, tel. 272-13-19, 272-13-18,
www.nauka-nanrk.kz / physics-mathematics.kz

© National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan, 2018

Address of printing house: ST "Aruna", 75, Muratbayev str, Almaty

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 1, Number 317 (2018), 6 – 13

UDC 372.25

E.I.Smirnov¹, A.L.Zhokhov¹, A.A.Yunusov³, A.A.Yunusov⁴, O.B.Simonova²

¹K.D. Ushinskiy Yaroslavl State Pedagogical University, Yaroslavl, Russia;

²Kirov Regional State Educational Institution, Russia;

³KIPUN-Kazakhstan Engineering Pedagogical University of Friendship of Peoples, Shymkent, Republic Of Kazakhstan;

⁴Eurasian humanitarian Institute, Astana, Republic of Kazakhstan,

ya.lvovich2012@yandex.ru zhall@mail.ru Yunusov1951@mail.ru s545231@yandex.ru

**VISUAL MODELING OF THE MANIFESTATION
OF THE ESSENCE OF MATHEMATICAL CONCEPTS
AND METHODOLOGICAL PROCEDURES**

Abstract. One of the ways to enhance the effectiveness of mathematical education of schoolchildren is to actualize solutions to complex tasks by adapting modern science. This possibility arises in the identification of "problem areas" of mathematics education and the construction of generalized constructs that are associated with the "problem area". In this article, on the basis of the dialogue of cultures and means of mathematical and computer modeling structured stages of adaptation and technological constructs of actualization synergy in training at the study of the notion of limit of a function. Didactic mechanism of the development of the essence of this construct is the implementation of the model cluster founding, are equipped with the motivation, applied learning situations and tasks at different levels. Longitudinal study of problem areas allows us to effectively develop the intellectual operations of thinking, intercultural communication, creative independence and self-organization of the schoolboy.

Keywords: mathematical education, dialogue of cultures, synergy, clusters of a founding, functional literacy activities, computer simulations, solve complex problems, limit of a function.

Introduction. Young people of the modern world have become more intolerant of manifestations of established stamps in education, lack of flexibility in teaching influences, have become pragmatic in assessing the emerging circumstances of life, giving priority to building personal preferences and prospects for their future life. At the same time, intellectual operations of thinking (understanding, concretization, abstraction, generalization, modeling, analogy, associations, etc.), which underlie the formation of universal learning activities of trainees, have ceased to develop effectively in school education for various objective and subjective reasons. And in this process, the role of mathematical education is lost as one of the most effective tools for personal development and development of social experience of previous generations, including amidst grandiose applications of mathematics. Suffice it to mention the achievements of fractal geometry (B.Mandelbrot, M.Feigenbaum, M.Barnslo, E.Feder, V.S.Sekovanov, etc.), the theory of chaos and catastrophes (G.Khaken, E.Lorents, A.N. Kolmogorov, V.I. Arnold, G.G. Malinetskii, R. Tom, O. Ressler, etc.), the theory of fuzzy sets and fuzzy-logic (T. Zade, A. Koffman, R. Ronald, etc.), theory coding and encryption (K.Shannon, D.Huffman, L.S. Khill, etc.), the theory of generalized functions (L.Shvarts, L.V. Sobolev, I.M. Gelfand, A.Martino, V.P. Palamodov, etc.), etc. But it is under modern conditions of intensive application of mathematical methods in science, in the humanities, in technology and related sciences, and even in conjunction with information technology, these studies would certainly have to be reflected in the changing programs of school and university mathematical education. First of all, there is a growing need for the actualization of generalized constructions and relations in the content of school and professional mathematical education, connected

primarily with the solution and research of complex problems by means of mathematical and computer modeling. As S.L. Rubinshtein [2] "... the generalization of the relations of objective content is, and then is realized as a generalization of the operations performed on the generalized substantive content; generalization and consolidation in the individual of these generalized operations lead to the formation of the corresponding abilities in the individual. " In such a paradigm, the teacher plays the most important role in improving the quality of teaching mathematics in high school. For example, ideally the future teacher should master the generalized content and methods of activity in the university so that when he comes to school, learn the school subject together with the students at the level of a well-founded entity, thus denying the so-called known "double oblivion" Klein.

Our concept assumes that the teaching of mathematics should take place in an informationally saturated educational environment in the context of a dialogue between the mathematical, informational humanitarian and natural science cultures and the integration of the didactic efforts of the teacher and pupil in the direction of revealing the essences of the basic educational elements (established symbolic forms, concepts, theorems, procedures, algorithms, ideas). And similar processes are directly related to synergetic effects and mechanisms of perception of complex information by the student's personality, the development of his mathematical abilities and creative independence, the construction of special procedures for mastering mathematical sign forms, objects and phenomena. As a result of such cognitive activity, the growth of educational and professional motivation, the development and self-development of thinking, and the expansion of experience and culture in the context of applied and professional orientation will be noticeable. Therefore, the alignment of stages and hierarchies in the process of level identification of the essences of mathematical forms, concepts and procedures by means of visual modeling is the most important mechanism to overcome the formalism in mastering the content of mathematics and represents a serious and far from solved problem in the didactics of mathematics.

Methodology, theory and technology. The realization of the announced concept is connected with the mastering of complex knowledge by the means of mathematical and computer modeling in a saturated information and educational environment. An effective tool for mastering complex knowledge can be the research and adaptation to the school or university mathematics of modern achievements in science that are vividly and significantly represented in applications to real life, the development of other sciences, high technologies and industries. The development of the philosophical concept of complexity (I.Kant, G.V.Gegel, I.Prigozhin, G.Khaken, V.V.Orlov, I.S.Utrobina, H.Alven, T.Vasilieva and others) is mediated extensive experimental material, practice and interdependence of integrative processes in science, technology, economics, social transformations and educational paradigms. Polyvalence, multiplicity, multipolarity, unpredictability, emergence and disequilibrium of the modern world cannot be unrelated to the categories of development of the essence of objects, phenomena and processes through the manifestation of the regularities of transitions to higher levels of complexity as components of a concrete general theory of development (V.V. Orlov, St. Bir, N. Winer, G. Neumann, and others). The researchers conclude that complexity is an integrating characteristic of the ability to self-organization when certain critical levels are reached. So French P.A. and Funke D. [8] define the RHC as a multi-step behavioral and cognitive activity aimed at overcoming a large number of previously unknown obstacles between fuzzy, dynamically changing goals and conditions. Psychological features of mastering complex knowledge were studied in detail by A.N. Poddyakov [1]. We further explore the directions of pedagogical support for mastering complex knowledge by students on the basis of adapting modern achievements in science to school and university mathematics with the manifestation of synergistic effects.

1. The basic notion of the presented concept is the concept of foundation as a philosophical category, pedagogical technology and psychological mechanism of personality development [3]. What is the phenomenon of foundation? Funding is the term used in phenomenology (and in other sciences) to describe the relationship of ontological justification. E. Husserl defines the funding relation as follows: A is founded by B, if for existence of A it is essential that B, only in unity with which A can exist. The foundation ratio can be one-way (A is weighted in B) or two-sided (A and B are weighted into each other). According to the phenomenological teaching, all complex high-level acts and objectifications are grounded in the original simple acts and subjects. In pedagogy for the first time the concept of foundation was introduced by V.D. Shadrikov and E.I. Smirnov in 2002 [4] as the process of creating conditions for

the gradual deepening and expansion of school knowledge in the direction of professionalization and the formation of an integral system of scientific and methodological knowledge as the process of forming an integral system of professional and pedagogical activity. In connection with the revealed tendencies, the authors proposed to deepen the theoretical and practical components of the mathematical education of the future teacher of the natural-science profile by changing the content and structure of the natural-science and methodological training in the direction of strengthening the school component of natural-science education, with the subsequent establishment of the knowledge and experience of the individual at different levels. The fundamental difference between the structure-forming principle of foundation is the definition of the basis for a spiral scheme of modeling the basic knowledge, skills, and skills of subject (including mathematical) preparation of students of higher pedagogical universities. School knowledge will become a structure-forming factor, allowing to select theoretical knowledge from the higher-level subject area, through which the knowledge of the school is born.

The problem, however, is connected with the fact that the generalized essence is complex, multilayered, multifunctional and difficult to master by many students. It is clear that such situations in the mastery of mathematics require the introduction of special procedures, stages and methods of cognitive activity of schoolchildren for the maximum possibility of updating the order parameters in this "chaos" of mathematical concepts. It is the dissection of the essence of the means of visual modeling of such "problem zones" in mathematical education that is possible by designing a dialogue of mathematical, information, natural and humanitarian knowledge with the manifestation of synergistic effects.

2. It is this mechanism that serves as a visual modeling [6] as an innovative construct aimed at identifying the essence of mathematical concepts, procedures and situations based on modeling in teaching mathematics, it is necessary to lead to understanding. The main element is the centering of the student, the optimal inclusion of his perceptual, cognitive, reflexive, emotional-volitional, motivational and creative structures in the development of mathematical knowledge. The main thing is the adequacy of the a priori model and the results of students' mental activity, conscious and leading to understanding. Visual simulation is an interactive triad: the person model – understanding. Necessary attributes of a visual simulation: the mutual transitions of sign systems: verbal, symbolic, figurative and graphic and specific activity; stability of perceptions of mathematical knowledge; the adequacy of the a priori and effective models; the selection and updating of basic educational elements; the sensitivity of the modalities of perception; activity cognitive processes. It is necessary to know the peculiarities of mental development of each student, types and hierarchy of models, means of optimization of logical structures, laws of perception and operation of sign systems, means of diagnosis of personality and intellectual operations, controlling and evaluating procedures, self-improvement and retraining of teachers. Therefore, the actual problem is the organization of the process of learning mathematics, when the views arising in the thinking of students reflect the basic, essential, key aspects of subjects, phenomena and processes, including through adequate modeling of mathematical knowledge. It is the identification and formation in the cognitive process of these nodal, supporting qualities of the object or the process of perception (perceptual model), adequately reflecting the essence of the object or process, and is the essence of the process of visual modeling. At the same time, the models fixing the procedure of mathematical actions in the process of research activity acquire special significance.

Since the essence reveals its reality in the totality of the external characteristics of the object, in its manifestations, revealing the essence through the philosophical categories of the internal, General, content, cause, necessity and law, first of all, we determine the component composition of the content and procedural characteristics of the manifestation of the essence. Content modus: symbolic, verbal, figurative-geometric and tactile-kinesthetic manifestations; procedural modus: historical-genetic, concrete-activity, experimental and applied educational situations and manifestations. Comprehension of the subject matter by students in a certain categorical field of knowledge and methods of activity, sufficient for the success and effectiveness of operating with it, does not necessarily coincide in the content and severity of the essential links. Moreover, it is possible to attach additional links that, together with the necessary links, create the integrity and hierarchy of the entity in this categorical field. This variability and mobility of the subject matter requires updating the step – by-step progress to its cognition and determines the third dimension of the essence-personal-adaptive in its characteristics, and determines the three-component integrity of the subject matter as an object of cognition in the course of cognitive

activity. Thus, we present the following structural and functional model of the essence of mathematical learning elements (Fig.One):

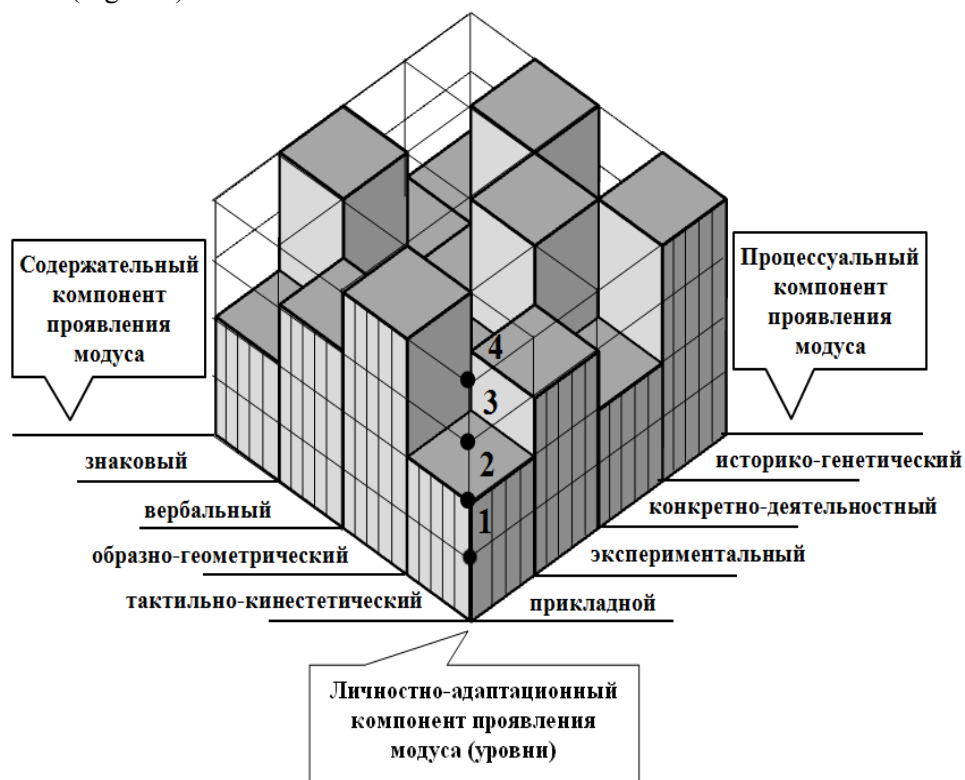


Figure1 - Structural-functional model of the essence of mathematical learning elements

3. Dialogue of cultures is a methodical mechanism: within the framework of this work it is used as a dialogue of cultures in its personal aspect (DCL), as communication of personalities of participants - DCL (Ук - ученик; Ул - учитель), carried out by them on the basis of a work of culture (PC), arisen in a certain facet of culture and / or represented in any of the possible incarnations, including the educational text created, including in the process of the DC. First of all, the DCL presupposes the spiritual communication of specific carriers of individual (personal) culture with the use of all the basic components of each individual. In real execution, the DCL is implemented as a kind of a triad in the field of meanings given by an ordered triple \langle "culture of one participant"; "PC culture"; "culture of another participant" \rangle . In the educational process, the teacher (UL) and the students (UC) in their various combinations (one - one, one - group, group - group, etc.) appear as participants in the DCL. The role of the teacher is to organize and manage the DCL until its completion and / or transition to a new DCL based on, preferably, those PCs that were created within the framework of the committed DCL. DCL in the methodical sense is an art (and a kind of technology) of such an organization of learning, in which dialogue participants need an outbreak of understanding, that is, "suddenly" a new (personally new) understanding of the PC under consideration. In other words, the technology of DCL is based on "dialectic as a dialogical art" (M. Mamardashvili), as the creation of own PCs; only then can we assume that there is a "thawing" of dialectics as a dialogical art. In our understanding, the place of DCL (in any of its variants) is the second stage of knowledge of a mathematical object.

It is believed that the DCL was held if, as a result, a new work of culture (PC₂) appeared for the participants, created in the process of communication as a result of a joint or individual transformation of the original PC₁. Since along with the change in PC₁ there are some changes in the participants of the DCL, the latter, if completed, makes sense to present the following scheme: $\langle U_1 - PC_1 - U_k \rangle \rightarrow \langle U_1 - PC_2 - U_k \rangle$. The pedagogical mechanism for the inclusion of students in the DCL is the learning situation of "tension and success", organized, for example, on the basis of a personally perceived fragment of educational material, which is a particular example of an educational PC.

In literature, a broader concept is used - a dialogue of cultures, originating from the philosophy of existentialism. In the domestic culture for the first time, the philosopher and philologist M.M. Bakhtin, later - VS. Biblerom, S.Yu. Kurganov and others. Bakhtin defined the architectonics of the Palace of Culture as a responsible act; according to Bakhtin, its structural elements are: I, Other, I-for-Other. Naturally, in the methodological plan, all this acquires corresponding shades and forms of realization [6].

4. Cluster of generalized construct Foundation (for example, the concept of "function limit"):

1 - the initial level of entity development - the limit of the function at the intuitive-visual level, the functional stage of awareness and correction of functions, parameters and conditions of the limit process, the area of polyhedral complexes, triangulations lateral surface of regular (layers the same height) of the cylinder or "boot" Schwartz; the Koch snowflake, the Sierpinski napkin (perimeter and area as the limiting constructs); the attractors and basins of attraction in piecewise-linear maps; multiple homothety of the plane and space (the fixed point, polars, basins of attraction).

1 - the area of polyhedral complexes, triangulations lateral surface of regular (layers the same height) of the cylinder or "boot" Schwartz; the Koch snowflake, the Sierpinski napkin (perimeter and area as the limiting constructs); the attractors and basins of attraction in piecewise-linear maps; multiple homothety of the plane and space (the fixed point, polars, basins of attraction).

Forms and means: resource and laboratory-calculation classes, work in small groups, lessons-lectures, pedagogical software products, task banks, presentation trainings, ClassPad400, GeoGebra, Web-resources.

2 - partial limits theorem about the coverage, the upper and lower limits of a function; area of polyhedral complexes, triangulations of side surface irregular (layers of different height) of the cylinder or "boot" Schwartz; multiple homothety plane and space in the conditions of dynamic chaos (the Sierpinski triangle, the Cantor set, "sponge" Menger).

? - tree and Feigenbaum constant and transition from order to chaos; the fractal structure of the functions of the van der Waerden (computer and mathematical modeling, approximation curve, continuity and nondifferentiability of curve).

Forms and means: resource and laboratory and calculation classes, work in small groups, lecture lessons, pedagogical software products, task banks, presentation trainings, ClassPad400, GeoGebra, Web resources, Qt Creator cross-platform environment, project activities, interactive whiteboards.

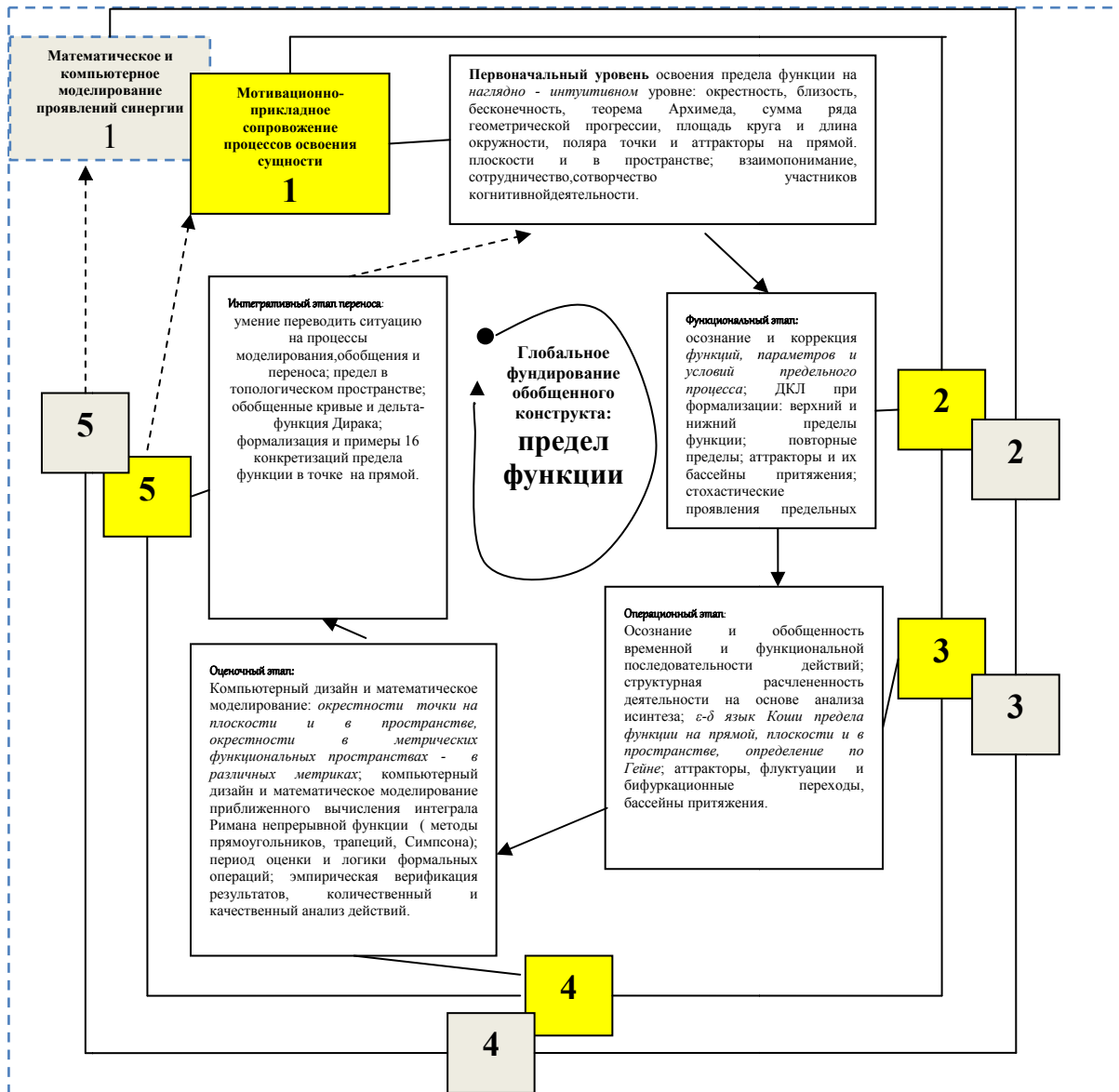
3 - computer simulation ε - δ of the Cauchy language; business game "Finding min $N(\varepsilon)$ for the sound sequence"; variation of parameters and computational design of the spatial limit of a sequence; computer design and variations of the fractal sets of Mandelbrot and Julia (iteration, fixed point, the variation of the polynomial n-th degree, the basins of attraction); the study of attractors of nonlinear mappings (Bernoulli, Hainaut, display "Baker", "cat" Arnold, testoobraznaja function).

3 - strange attractors of the Lorenz and Henon; affine transformation and maple leaf, Barnslow; dust Sierpinski fractals and art.

Forms and tools: resource and laboratory and design classes, work in small groups, lessons, lectures, educational software products, banks jobs, training presentations, ClassPad400, GeoGebra, Web resources, cross-platform environment Qt Creator, projects, business games, interactive whiteboard.

4 - computer-aided design and mathematical modeling of the neighborhood points on a plane and in space for different metrics, universality of pointwise convergence and Euclidean metric; numerical methods for finding the area of curvilinear trapeze (rectangles, trapezoids, Simpson).

4 - computer and mathematical modeling: transformations Hutchinson, Seth, multifractal, the limit in the Hausdorff metric.



Forms and tools: resource and laboratory and design classes, work in small groups, lessons, lectures, educational software products, banks jobs, training presentations, ClassPad400, GeoGebra, Web resources, cross-platform environment Qt Creator, projects, business games, interactive whiteboard.

5 - computer and mathematical modeling of a generalized solution of the wave equation; computer design weird cross – attractors of affine transformations of the plane.

5 - generalized curves and the δ - function Dirac (instantaneous impact and momentum, generalized functions and the limit, the summation of divergent series); the Lebesgue integral (estrogenes, advantages, applications); non-standard analysis by A. Robinson (estrogenes, axioms, theorems).

Forms and tools: resource and laboratory and design classes, work in small groups, lessons, lectures, educational software products, banks jobs, training presentations, ClassPad400, GeoGebra, interactive whiteboard, Web-resources, cross-platform environment Qt Creator, projects, business game.

Innovation: the potential of synergy is realized by visualizing the dynamics of functional dependences of the parameters of a limit process by means of mathematical and computer modelling (used ClassPad400 and MathCad for the study of the limit of rational and transcendental functions in one-dimensional, two-dimensional and three-dimensional cases). This is the construction of polars, attractors,

pools of attraction, fluctuation of initial parameters; finding $\min N(\varepsilon)$ and the implementation of the business game scenario in the research activities of small groups. The cluster of Foundation of the essence of the concept of function limit with the continuity of the content, forms, means, methods and technologies in the context of integration of computer and mathematical modeling of the processes of synergy, actualization and unity of mathematical knowledge from different fields, motivic and applied support of the processes of manifestation of the essence.

5. Technological stages of the development of complex knowledge-based implementation of concepts of Tundrovaya experience of self, visual modeling of objects, processes and phenomena of the dialogue of cultures and personalities of the generalized model of cognition suggest a synergetic attributes by means of mathematical and computer modeling. Reliance on the identification of "problem areas" in mathematical education and adaptation of generalized designs of modern achievements in science to school and University mathematics as a means of manifestation of the essence of the "problem zone" is a key idea to improve the quality of mathematical education and the development of intellectual operations of students.

Results. The situation of chaos in the processes of mastering mathematical knowledge and procedures by certain categories of students and students is not the last problem in education. This lack of adequate solutions to this problem leads to a formalism of knowledge, a low level of educational and professional motivation, an inadequate level of personal development of students, especially in the context of self-organization and self-development of the individual. In the present study, this problem is proposed to be solved by methods involving students in the dialogue of cultures, building and adapting the generalized constructs of complex knowledge that underlie the "problem zones" of mathematical education. These constructs are the samples of modern achievements in science: fractal geometry, fuzzy sets theory, generalized functions, coding theory, chaos theory and catastrophes, etc., solved by means of mathematical and computer modeling and adapted to the available level of mathematical competence of schoolchildren and students. In this respect, the parameters of order in mathematics education are also technologies of establishing the experience of the individual and visual modeling of objects, procedures and phenomena, actualizing the aspect of theoretical generalization, building hierarchies and stages of understanding the essence of mathematical concepts and procedures that promote the development of intellectual operations and the manifestation of synergetic effects in teaching mathematics. Namely, the concept and technology of mastering complex knowledge in the mathematical education of schoolchildren and students on the basis of adaptation of modern achievements in science to school and university mathematics were developed. The technologies of the identification of the experience of the individual and the visual modeling of objects, processes and phenomena are clarified, characteristics and a structural-functional model of the essence of mathematical educational elements on the basis of hierarchy are developed. The graph of the coordination of the stages of manifestation of the essence in the "problem zone" and stages of the manifestation of synergy of mathematical education as a didactic mechanism and model of cognitive activity in the process of mastering mathematics with a synergetic effect is developed. The pedagogical experience of the pilot implementation of the developed technology of mathematical education shows its effectiveness in the growth of educational and professional motivation, the development of intellectual operations, improving the quality of teaching math students and students.

REFERENCES

- [1] Podyakov A. Psychology of learning in conditions of novelty, complexity, uncertainty. Psychological research. M.: Higher School of Economics, 2015. C. 6-10.
- [2] Rubinshtein S. About thinking and ways of its research. Moscow: USSR Academy of Sciences, 1958.
- [3] Smirnov E.I. Funding of experience in vocational training and innovative activity of the teacher. Monograph: Yaroslavl, Publishing house "Chancellor", 2012. 654 c.
- [4] EI Smirnov Preparation of the teacher of mathematics: Innovative approaches // Ed. V.D. Shadrikova. Moscow: Gardariki, 2002. 383 pp.
- [5] Smirnov E.I. Technology of visual-model training in mathematics. Monograph.: YAGPU Publishing House, Yaroslavl, 1997.-323 pages.
- [6] Simonova O.V., Zhokhov A.L. Conditions for the development of functional literacy of students of the V-VI classes in the process of academic mathematics// "International Kolmogorov Readings - XIV", dedicated to the 100th anniversary of Professor ZA Skopets: Moscow - Koryazhma-Yaroslavl-Arzamas. Editorial staff of the newspaper "Successful". 2017. P.103-107.

[7] Smirnov E.I. Bogun V.V., Uvarov A.D. Synergy of the teacher's mathematical education: an introduction to the analysis. Monograph. Chancellor, 2016. 308 p.

[8] Funke I., Frensch P.A. Solving complex problems: research in North America and Europe // Foreign psychology. 1995. Т. 3, No. 5. - P. 42-47.

[9] Zhokhov A.L. Knowledge of mathematics and the foundations of the scientific worldview: the worldview directed learning in mathematics: a Training manual. – Yaroslavl, publishing house of AGPU, 2008. 1804 с.

[10] Zhokhov, A.L. Formation of the scientific worldview of students in teaching mathematics [Text]. Yaroslavl: publishing house of YarGPU, 2011. 211 p.

Е.И Смирнов¹, А. ЛЖохов¹, А.А. Юнусов, А.А. Юнусов⁴, О.В.Симонова²

¹К.Д.Ушинский атындағы ЯМПУ, Ресей, Ярославль;

²Киров облыстық мемлекеттік білім орталығы, лицейі, Ресей, Киров;

³КИПХДУ Шымкент, Толеби-32, Қазақстан Республикасы;

⁴Евразиялық гуманитарлық институты. Астана. Қазақстан Республикасы

МАТЕМАТИКАЛЫҚ ҰҒЫМДАРДЫҢ ЖӘНЕ ӘДІСТЕМЕЛІК ЖҰМЫСТАРДЫҢ ПАЙДА БОЛУ КЕЗЕҢДЕРІНІҢ МӘН-МАҒЫНАСЫНЫҢ КӨРНЕКІ МОДЕЛДУ

Аннотация. Мектеп оқушыларына математикалық білім берудің тиімділігін арттырудың біржолы күрделі есептерді шығару жолдарын заманауи ғылымның жетістіктеріне лайықты етіп қайта жаңғырту. Мұндай мәселе математикалық білім берудегі «проблемалық аймақтың» пайда болуы мен «проблемалық аймаққа» байланысты жалпыланған конструктарды құру мүмкіндігі белгілі болуына байланысты туындады. Бұл мақала функцияның шегі ұғымын оқытуды зерттеудес инергияны қайта жаңғыртудағы математикалық және компьютерлік моделдеу құралдары мен технологиялық конструктың бейімделу кезеңдерінің диалог мәдениеті негізінде құрылған. Мұндағы конструкты менгерудің дидактикалық механизмінің мән-мағнасы, мативациялық-қолдарбалық оқу жағдай атары кешенін фундирлеу кластер моделі және әртүрлі деңгейдегі есептер болып табылады. «Проблемалық аймақты» лонгитюдтік зерттеулер оқушылардың тұлғалық ойлауына, мәдениет араралық коммуникацияға, өзбетінше жасампаздық пен өін-өзі ұйымдастыруды тиімді жүзеге асыруға мүмкіндік береді.

Тірек сөздер: математикалық білім беру, диалог мәдениеті, синергия, фундирлеу кластері, іс-әрекеттің функционалдық сауаттылығы, компьютерлік моделдеу, күрделесептерді шығару, функцияның шегі.

УДК372.85

Е.И Смирнов¹, А.Л.Жохов¹, А.А., Юнусов³, А.А. Юнусова⁴, О.В.Симонова²

¹ФГОУ ВПО «Ярославский государственный педагогический университет им.К.Д. Ушинского», г.Ярославль, Россия;

²Кировское областное государственное образовательное учреждение, лицей, г. Киров, Russia;

³ КИПУДН (160012, Шымкент, ул. Толеби-32), Республика Казахстан;

⁴Евразийский гуманитарный институт.г. Астана. Республика Казахстан

НАГЛЯДНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭТАПОВ ПРОЯВЛЕНИЯ СУЩНОСТИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ПОНЯТИЙ И МЕТОДИЧЕСКИХ ПРОЦЕДУР

Аннотация. Одним из путей повышения эффективности математического образования школьников является актуализация способов решения сложных задач путем адаптации современных достижений науки. Возможность этого возникает при выявлении «проблемных зон» математического образования и построении обобщенных конструктов, связанных с «проблемной зоной». В данной статье на основе диалога культур и средствами математического и компьютерного моделирования выстроены этапы адаптации и технологические конструкты актуализации синергии в обучении при исследовании понятия предела функции. Дидактическим механизмом освоения сущности такого конструкта оказывается реализация модели кластера фундирования, оснащенного комплексами мотивационно-прикладных учебных ситуаций и задач разного уровня. Лонгитюдное исследование «проблемных зон» позволяет эффективно развивать интеллектуальные операции мышления, межкультурные коммуникации, творческую самостоятельность и самоорганизацию личности школьника.

Ключевые слова: математическое образование, диалог культур, синергия, кластеры фундирования, функциональная грамотность деятельности, компьютерное моделирование, решение сложных задач, предел функции.

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 1, Number 317 (2018), 14 – 17

B.S. Kalmurzayev¹, N.A. Bazhenov²

¹Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan;

²Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk, Russia.

birzhan.kalmurzayev@gmail.com, bazhenov@math.nsc.ru

EMBEDDABILITY OF m -DEGREES INTO EQUIVALENCE RELATIONS IN THE ERSHOV HIERARCHY

Abstract. The paper is devoted to the study of equivalence relations in the hierarchy of Ershov. An equivalence relation R on ω is computably reducible to an equivalence relation S if there exists a computable function $f(x)$ such that for any x and y , the conditions xRy and $f(x)Sf(y)$ are equivalent. In this paper we construct isomorphic embeddings of semilattices of m -degrees into partial orders of equivalence relations in the hierarchy of Ershov with respect to computable reducibility.

Key words. Equivalence relations, computable reducibility, hierarchy of Ershov, computably enumerable sets, semilattice of computably enumerable m -degrees.

A set A is m -reducible to a set B (denoted by $A \leq_m B$) if there is a computable function f such that for any $x \in \omega$ the conditions $x \in A$ and $f(x) \in B$ are equivalent. Such a function f is called a reduction function. A set A is 1-reducible to a set B (denoted by $A \leq_1 B$) if $A \leq_m B$ and the corresponding reduction function is injective. A formula $A \equiv_m B$ means that $A \leq_m B$ and $B \leq_m A$. The m -degree of a set A is denoted by $d(A)$, i.e. $d(A) = \{B: A \equiv_m B\}$. We use the same notation \leq_m to denote a natural ordering on the set of m -degrees:

$$d(A) \leq_m d(B) \Leftrightarrow A \leq_m B.$$

A partial order $L_m^0 = (\{d(X): X \text{ is a recursively enumerable set and } X \neq \emptyset, \omega\}, \leq_m)$ is an upper semilattice and an ideal in the upper semilattice of all m -degrees. The supremum operation in L_m^0 is induced by the join of sets:

$$A \oplus B \Leftrightarrow \{2x: x \in A\} \cup \{2x + 1: x \in B\}.$$

It is well-known that L_m^0 contains the greatest and the least elements. For further definitions and preliminaries on m -reducibility, we refer the reader to the monographs [1, 2].

Definition ([6]). A set A belongs to the class Σ_n^{-1} in the hierarchy of Ershov if there are computable functions $f(x, t)$ and $h(x, t)$ such that for any $x, t \in \omega$, the following conditions hold:

- (1) $A(x) = \lim_s f(x, s)$ and $f(x, 0) = 0$;
- (2) $h(x, 0) = n$ & $h(x, t + 1) \leq h(x, t)$;
- (3) $f(x, t + 1) \neq f(x, t) \Rightarrow h(x, t + 1) < h(x, t)$.

If a pair of functions $\langle f, h \rangle$ satisfies the conditions above, then we say that $\langle f, h \rangle$ is a Σ_n^{-1} -approximation of the set A . A set A lies in the class Π_n^{-1} in the hierarchy of Ershov if the complement of A belongs to the class Σ_n^{-1} . A set from the class Σ_n^{-1} (Π_n^{-1}) is also called a Σ_n^{-1} -set (Π_n^{-1} -set). Σ_1^{-1} -sets are known as computably enumerable sets. A detailed exposition of results on these sets can be found in [3, 4, 5, 6].

The classes Σ_n^{-1} and Π_n^{-1} are closed downwards under m -reducibility. It is known [3] that each of the classes contains a universal set. Moreover, the partial orders (Σ_n^{-1}, \leq_m) and (Π_n^{-1}, \leq_m) are upper semilattices.

Proposition 1. A set A belongs to Σ_n^{-1} if and only if there is a computable function $h(x, t)$ such that for any $x, t \in \omega$, the following holds:

- (1) $A(x) = \text{rest}(\lim_s h(x, s), 2)$;
- (2) $h(x, 0) = 0 \ \& \ h(x, t) \leq h(x, t + 1) \ \& \ h(x, t) \leq n$.

Proposition 2. A set A belongs to Π_n^{-1} if and only if there is a computable function $h(x, t)$ such that for any $x, t \in \omega$, the following holds:

- (1) $A(x) = \overline{\text{sg}}(\text{rest}(\lim_s h(x, s), 2))$;
- (2) $h(x, 0) = 0 \ \& \ h(x, t) \leq h(x, t + 1) \ \& \ h(x, t) \leq n$.

We assume that all considered sets and equivalence relations are defined on the domain ω . For a non-zero $n \in \omega$, Id_n is a computable equivalence relation which satisfies the following: $x \text{Id}_n y$ if and only if x and y are equivalent modulo n . By Id we denote the identity equivalence relation. For an equivalence relation E and $a \in \omega$, $[a]_E$ denotes the E -equivalence class of the element a .

Definition. An equivalence relation E on ω is called a Σ_n^{-1} equivalence relation (a Π_n^{-1} equivalence relation) if the set E is a Σ_n^{-1} -set (Π_n^{-1} -set).

An equivalence relation R is *computably reducible* to an equivalence relation Q (denoted by $R \leq_c Q$) if there is a computable function f such that for any $x, y \in \omega$, the condition $(x, y) \in R$ holds if and only if $(f(x), f(y)) \in Q$; i.e. there is an algorithm which transforms different R -equivalence classes into different Q -equivalence classes. Equivalence relations R and Q are equivalent if each of them is reducible to the other one. The family of all equivalence relations which are equivalent to R is called the degree of an equivalence relation R .

It is clear that an equivalence relation E satisfies $E <_c \text{Id}$ if and only if $E \equiv_c \text{Id}_n$ for some $n \in \omega$.

Definition (A. Sorbi and U. Andrews). An equivalence relation E is *dark* if E is incomparable with the identity equivalence relation under the reducibility \leq_c .

For an arbitrary c.e. set A , let $R_A = \{(x, y) : x = y \vee \{x, y\} \subseteq A\}$.

Proposition ([11]). Let A, B be non-empty c.e. sets.

- 1) R_A is computable if and only if A is computable.
- 2) $A \leq_1 B$ implies that $R_A \leq_c R_B$.
- 3) If $R_A \leq_c R_B$, then $A \leq_m B$.

The proposition implies that c.e. 1-degrees are isomorphically embeddable into the structure of c.e. equivalence relations. It is well-known that c.e. 1-degrees do not form a semilattice. Hence, the structure of equivalence relations under computable reducibility is also not a semilattice.

In this work we study embeddings of semilattices of m -degrees into structures of equivalences in the hierarchy of Ershov. Results on embeddings of c.e. m -degrees into Rogers semilattices can be found in [7, 8, 9, 10]. For an embedding of c.e. 1-degrees into structures of equivalence relations, the reader is referred to [11, 12].

Embedding of semilattices of m -degrees into structures of equivalence relations in the hierarchy of Ershov.

Theorem 1. For any $n > 0$, the semilattice (Σ_n^{-1}, \leq_m) is isomorphically embeddable into the structure $(\Pi_{2n}^{-1} \text{ equivalence relations}, \leq_c)$.

Proof. We consider the following operator: for an arbitrary set X , we set

$$T(X) = \{(x, y) : \{x, y\} \subseteq X \vee \{x, y\} \subseteq \overline{X}\}.$$

It is clear that for any set X , the set $T(X)$ is an equivalence relation. We prove that the map $X \rightarrow T(X)$ induces an isomorphic embedding from the upper semilattice (Σ_n^{-1}, \leq_m) into the structure $(\Pi_{2n}^{-1} \text{ equivalence relations}, \leq_c)$. We also show that our estimate of the level in the hierarchy of Ershov is sharp. In order to obtain this, we prove the following lemmas.

Lemma 1. If $X \in \Sigma_n^{-1}$, then $T(X) \in \Pi_{2n}^{-1}$.

Proof of Lemma 1. Suppose that a pair of functions $\langle f_X, h_X \rangle$ is a Σ_n^{-1} -approximation of the set X . We build an approximation of the set $T(X)$: for any $x, y \in \omega$, set

$$\begin{aligned} f((x, y), t) &= |f_X(x, t) + f_X(y, t) - 1|; \\ h((x, y), t) &= h_X(x, t) + h_X(y, t). \end{aligned}$$

We prove that the pair $\langle f, h \rangle$ is a Π_{2n}^{-1} -approximation of the set $T(X)$.

1) $f((x, y), 0) = |f_X(x, 0) + f_X(y, 0) - 1| = 1$; and

$$\lim_s f((x, y), s) = |\lim_s f_X(x, s) + \lim_s f_X(y, s) - 1| = |X(x) + X(y) - 1|.$$

The latter equation implies the following: $T(X)(x, y) = 1$ if and only if $X(x) = X(y)$. Therefore, $T(X)(x, y) = 1$ if and only if $\lim_s f((x, y), s) = 1$.

2) $h((x, y), 0) = h_X(x, 0) + h_X(y, 0) = n + n = 2n$; and $h((x, y), t + 1) = h_X(x, t + 1) + h_X(y, t + 1) \leq h_X(x, t) + h_X(y, t) = h((x, y), t)$.

3) Suppose that $f((x, y), t + 1) \neq f((x, y), t)$. Thus, either $f_X(x, t + 1) \neq f_X(x, t)$, or $f_X(y, t + 1) \neq f_X(y, t)$. Hence, either $h_X(x, t + 1) < h_X(x, t)$, or $h_X(y, t + 1) < h_X(y, t)$. In turn, this means that $h((x, y), t + 1) = h_X(x, t + 1) + h_X(y, t + 1) < h_X(x, t) + h_X(y, t) = h((x, y), t)$.

Therefore, the pair of functions $\langle f, h \rangle$ is a Π_{2n}^{-1} -approximation of the set $T(X)$. Lemma 1 is proved.

Lemma 2. If $F \leq_c T(X)$ for a Σ_n^{-1} -set X , then $F \equiv_c T(Y)$ for some Σ_n^{-1} -set Y .

Proof of Lemma 2. Suppose that for an arbitrary equivalence relation F , we have $F \leq_c T(X)$ via a function f . Then the equivalence relation $T(X)$ contains at most two equivalence classes. Hence, the equivalence relation F also contains at most two classes. Therefore, if $Y = f^{-1}(X)$, then $F = T(Y)$. Lemma 2 is proved.

Lemma 3. $X \leq_m Y$ if and only if $T(X) \leq_c T(Y)$.

Proof of Lemma 3. Both reductions can be realized by the same function. Lemma 3 is proved.

Lemma 4. For any Π_{2n}^{-1} -set A , there is a Σ_n^{-1} -set B such that $A \leq_m T(B)$.

Proof of Lemma 4. Suppose that a pair of functions $\langle f_A, h_A \rangle$ is a Π_{2n}^{-1} -approximation of a set A . Moreover, let h_A be the function from Proposition 2. We build a Σ_n^{-1} approximation of a set B as follows:

$$\begin{aligned} f_B(2x, t) &= \begin{cases} 1, & \text{rest}(h_A(x, t), 4) = 2; \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \\ f_B(2x + 1, t) &= \begin{cases} 0, & \text{rest}(h_A(x, t), 4) = 0; \\ 1, & \text{otherwise.} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} h_B(x, 0) = n; \\ h_B(x, t + 1) = h_B(x, t) - |f_B(x, t + 1) - f_B(x, t)|. \end{cases}$$

It is not difficult to see that a pair of functions $\langle f_B, h_B \rangle$ is a Σ_n^{-1} -approximation of the set B . Furthermore, it is not hard to check that the reduction $A \leq_m T(B)$ can be realized by the function $f(x) = (2x, 2x + 1)$. Lemma 4 is proved.

Corollary 1. If X is an m -complete Σ_n^{-1} -set, then $T(X)$ is an m -complete Π_{2n}^{-1} -set.

Proof. Let X be an m -complete Σ_n^{-1} -set. We prove that any Π_{2n}^{-1} -set A satisfies $A \leq_m T(X)$. The proof of the theorem implies that there is a Σ_n^{-1} -set Y such that $A \leq_m T(Y)$. It is clear that $T(Y) \leq_c T(X)$. Suppose that the reduction $T(Y) \leq_c T(X)$ is realized by a function f ; then the reduction $T(Y) \leq_m T(X)$ is realized by the function

$$h((x, y)) = (f(x), f(y)).$$

Since m -reducibility is transitive, we have $A \leq_m T(X)$.

Corollary 2. For any non-computable set X , the equivalence relation $T(X)$ is dark.

Corollary 3. *The semilattice of computably enumerable m -degrees is isomorphically embeddable into the structure $(\Pi_2^{-1}$ equivalence relations, \leq_c).*

Corollaries 2 and 3 are evident.

Question. Is it possible to isomorphically embed the semilattice of c.e. m -degrees into the structure of c.e. equivalence relations?

The work of N.A. Bazhenov was supported by the Russian Foundation for Basic Research, project no. 16-31-60058 mol_a_dk.

The work of B.S. Kalmurzaev was supported by Grant 3952/GF4 "Equivalence relations, preordered structures, and algorithmic reducibilities on them, as a mathematical model of databases" of the Science Committee of the Republic of Kazakhstan.

REFERENCES

- [1] Rogers H., Theory of recursive functions and effective computability. McGraw-Hill, New York, 1967.
- [2] Mal'cev A.I., Algorithms and recursive functions, Groningen, Wolters-Noordhoff Publishing, 1970.
- [3] Ershov Yu.L., A hierarchy of sets. I, Algebra and Logic, vol.7, no.1, 1968, pp.25-43.
- [4] Ershov Yu.L., On a hierarchy of sets. II, Algebra and Logic, vol.7, no.4, 1968, pp.212-232.
- [5] Ershov Yu.L., On a hierarchy of sets. III, Algebra and Logic, vol.9, no.1, 1970, pp.20-31.
- [6] Arslanov M.M. The hierarchy of Ershov. Kazan State University, Kazan, 2007. In Russian.
- [7] Badaev S.A., Talasbaeva Zh.T., Computable numberings in the hierarchy of Ershov, in: S.S. Goncharov (ed.) et al., Mathematical logic in Asia. Proc. 9th Asian logic conf. (Novosibirsk, Russia, August 16-19, 2005), NJ, World Scientific, 2006, 17-30.
- [8] Badaev S.A., Manat M., Sorbi A., Rogers semilattices of families of two embedded sets in the Ershov hierarchy, Mathematical logic quarterly. Vol. 58, No 4-5, 2012, 366-376.
- [9] Kalmurzaev B.S., Embeddability of the semilattice L_m^0 in Rogers semilattices, Algebra and Logic, vol.55, no.3, 2016, pp.217-225.
- [10] Ershov Yu.L., Theory of numberings, Moscow, Nauka, 1977. In Russian.
- [11] Su Gao, Peter Gerdes, Computably enumerable equivalence relations, Studia Logica, 67, 2001, 27-59.
- [12] Andrews U., Lempp S., Miller J.S., Ng K.M., San Mauro L., Sorbi A., Universal computably enumerable equivalence relations, Journal of Symbolic Logic, vol. 79, no. 1, 2014, 60-88.

УДК 510.54

Б.С. Калмурзаев¹, Н.А. Баженов²

¹Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан;

²Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия.

О ВЛОЖИМОСТИ - СТЕПЕНЕЙ В ОТНОШЕНИЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ В ИЕРАРХИИ ЕРШОВА

Аннотация. Работа посвящена исследованию отношений эквивалентности в иерархии Ершова. Отношение эквивалентности R на ω -вычислимо сводится к отношению эквивалентности S , если существует вычислимая функция $f(x)$, такая что, для любых x и y условия xRy и $f(x)Sf(y)$ эквивалентны. В данной работе строятся изоморфные вложения полурешёток -степеней в частичные порядки отношений эквивалентности в иерархии Ершова относительно вычислимой сводимости.

Ключевые слова. Отношения эквивалентности, вычислимая сводимость, иерархия Ершова, вычислимо перечислимые множества, полурешётка вычислимо перечислимых m -степеней.

Б.С. Калмурзаев¹, Н.А. Баженов²

¹аль-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы, Қазақстан;

²РҒА СБ С.Л. Соболев атындағы математика институты, Новосибирск, Ресей.

ЕРШОВ ИЕРАРХИЯСЫНДА m -ДЕНГЕЙЛЕРДІҢ ЭКВИВАЛЕНТТІК ҚАТЫНАСТАРҒА ЕНГІЗУЛЕРІ ТУРАЛЫ

Аннотация. Бұл мақала Ершов иерархиясындағы эквиваленттік қатынастарды зерттеуге бағышталған. ω жиынында анықталған R эквиваленттік қатынасы S эквиваленттік қатынасына есептелімді көшіріледі деп атаймыз, егер кез келген x және y элементтері үшін xRy және $f(x)Sf(y)$ шарттары эквивалент болатындай $f(x)$ есептелімді функциясы табылатын болса. Бұл мақалада Ершов иерархиясындағы m -денгейлерді есептелімді көшірулерге байланысты эквиваленттік қатынастардың жартлай ретіне изоморфты енгізулері құрылады.

Тірек сөздер. Эквиваленттік қатынастар, есептелімді көшірулер, Ершов иерархиясы, рекурсив саналымды жиындар, рекурсив саналымды m -денгейлердің жатрыторы.

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 1, Number 317 (2018), 18 – 24

UDC 510.67

S.S. Baizhanov¹, B.Sh. Kulpeshov²

¹Institute of Mathematics and Mathematical Modelling, Almaty, Kazakhstan, e-mail: sayan-5225@mail.ru;

²International Information Technology University, Almaty, Kazakhstan, e-mail: b.kulpeshov@iitu.kz

ON EXPANDING COUNTABLY CATEGORICAL WEAKLY O-MINIMAL THEORIES BY BINARY PREDICATES

Abstract. In the present work, questions of preservation of model-theoretical properties at expanding a model of a 1-indiscernible countably categorical weakly o-minimal theory by an arbitrary binary predicate are studied. Questions of preservation of model-theoretical properties at expanding of countably categorical weakly o-minimal theories by unary predicates had been before studied. Here the notion of an equivalence-generatable formula has been introduced: if $R(x, y)$ is a p -stable formula for some non-algebraic 1-type p , then $R(x, y)$ is called an equivalence-generatable formula if every p -stable convex to the right or convex to the left formula formed from maximal convex subsets of the set $R(M, a)$ for some element $a \in p(M)$ is equivalence-generating. In terms of the introduced notion of an equivalence-generatable formula, a criterion for preserving the countable categoricity of a 1-indiscernible weakly o-minimal expansion by a binary predicate of 1-indiscernible countably categorical weakly o-minimal structures having the convexity rank 1 has been obtained.

Keywords: weak o-minimality, countable categoricity, 1-indiscernibility, expansion of models, equivalence-generating formula, equivalence relation.

Let L be a countable first-order language. Throughout this paper we consider L -structures and suppose that L contains the binary relation symbol $<$, which is interpreted as a linear order in these structures. The present paper deals with the concept of *weak o-minimality*, originally deeply studied by D. Macpherson, D. Marker, and C. Steinhorn in [1]. A subset A of a linearly ordered structure M is called *convex* if for any $a, b \in A$ and $c \in M$ whenever $a < c < b$ we have $c \in A$. A *weakly o-minimal* structure is a linearly ordered structure $M = \langle M, =, <, \dots \rangle$ such that any definable (with parameters) subset of the structure M is a union of finitely many convex sets in M . Recall that such a structure M is called *o-minimal* if every definable (with parameters) subset of the structure M is a union of a finite number of intervals and points in M . Thus, weak o-minimality is a generalization of o-minimality. Real closed fields with a proper convex valuation ring provide an important example of weakly o-minimal (not o-minimal) structures.

Let A, B be arbitrary subsets of a linearly ordered structure M . Then the expression $A < B$ means that $a < b$ whenever $a \in A$ and $b \in B$. The expression $A < b$ means that $A < \{b\}$. We denote by A^+ (and, respectively, A^-) the set of elements b of the considered structure M with the condition $A < b$ ($b < A$).

Definition 1[2] Let T be a weakly o-minimal theory, M be a sufficiently saturated model of the theory T , and let $\phi(x)$ be an arbitrary M -definable formula with one free variable.

The *convexity rank of the formula $\phi(x)$* ($RC(\phi(x))$) is defined as follows:

- 1) $RC(\phi(x)) \geq 1$ if $\phi(M)$ infinite.
- 2) $RC(\phi(x)) \geq \alpha + 1$ if there exist a parametrically definable equivalence relation $E(x, y)$ and an infinite number of elements $b_i, i \in \omega$, such that:

- For any $i, j \in \omega$, whenever $i \neq j$ we have $M \models \neg E(b_i, b_j)$
 - For each $i \in \omega$ $RC(E(x, b_i)) \geq \alpha$ and $E(M, b_i)$ is a convex subset of a set $\phi(M)$
- 3) $RC(\phi(x)) \geq \delta$, if $RC(\phi(x)) \geq \alpha$ for all $\alpha \leq \delta$ (δ is limit).

If $RC(\phi(x)) = \alpha$ for some α , we say that $RC(\phi(x))$ is defined. Otherwise (i.e. if $RC(\phi(x)) \geq \alpha$ for all α), we put $RC(\phi(x)) = \infty$.

Particularly, a theory has convexity rank 1 if there is no definable (with parameters) equivalence relation with an infinite number of convex infinite classes.

In this paper, we investigate the problem of preserving properties for expansions of models of countably categorical weakly o-minimal theories by binary predicates. Earlier in the works [3] – [5], we have studied the problem of preserving properties for expansions of models of countably categorical weakly o-minimal theories by unary predicates. As is known, in the work [6] Baizhanov B.S. proved that an expansion of a model of a weakly o-minimal theory by a unary predicate that distinguishes a finite number of convex sets preserves weak o-minimality of the expanded theory. However, in the case of expanding a model of a weakly o-minimal theory by a binary predicate that distinguishes a finite number of convex sets for each fixed either the first or the second parameter, the expanded theory can lose weak o-minimality (Example 4).

Recall some concepts originally introduced in [1].

Let $Y \subset M^{n+1}$ be an \emptyset -definable set, let $\pi: M^{n+1} \rightarrow M^n$ be a projection that drops the last coordinate, and let $Z := \pi(Y)$. For each $\bar{a} \in Z$ let $Y_{\bar{a}} := \{y: (\bar{a}, y) \in Y\}$. Suppose that for each $\bar{a} \in Z$ the set $Y_{\bar{a}}$ is bounded above, but has no supremum in M . Let \sim be an \emptyset -definable equivalence relation on M^n , defined as follows:

$$\bar{a} \sim \bar{b} \text{ for all } \bar{a}, \bar{b} \in M^n \setminus Z, \text{ and } \bar{a} \sim \bar{b} \Leftrightarrow \sup Y_{\bar{a}} = \sup Y_{\bar{b}}, \text{ if } \bar{a}, \bar{b} \in Z.$$

Let $\bar{Z} := Z / \sim$, and for each tuple $\bar{a} \in Z$ we denote by $[\bar{a}]$ \sim -class of the tuple \bar{a} . There exists a natural \emptyset -definable linear order on $M \cup \bar{Z}$, defined as follows. Let $\bar{a} \in Z$ and $c \in M$. Then $[\bar{a}] < c$ if and only if $w < c$ for all $w \in Y_{\bar{a}}$. If it is not true that $\bar{a} \sim \bar{b}$, then there exists a certain $x \in M$ such that $[\bar{a}] < x < [\bar{b}]$ or $[\bar{b}] < x < [\bar{a}]$, and therefore $<$ induces a linear order on $M \cup \bar{Z}$. We call such a set \bar{Z} by *sort* (in this case, \emptyset -definable sort) in \bar{M} , where \bar{M} is the Dedekind completion of the structure M , and consider \bar{Z} as naturally embedded in \bar{M} . Similarly, we can obtain sort in \bar{M} , considering infima instead of suprema.

Definition 2 [1] Let M be a linearly ordered structure, $D \subseteq M$ be an infinite set, $K \subseteq \bar{M}$, $f: D \rightarrow K$ be a function. We say that f is *locally increasing* (*locally decreasing*, *locally constant*) on D if for any $x \in D$ there exists an infinite interval $J \subseteq D$, containing x , so that f is strictly increasing (strictly decreasing, constant) on J .

We also say that a function f is *locally monotone* on the set $D \subseteq M$ if f is either locally increasing or locally decreasing on D .

Proposition 3 [7] Let M be a weakly o-minimal structure, $A \subseteq M$, $p \in S_1(A)$ be a non-algebraic type. Then any function in an A -definable sort whose domain contains $p(M)$ is locally monotone or locally constant on $p(M)$.

Example 4 Let $M := \langle \mathbb{R}, < \rangle$ be a linearly ordered structure on the set of real numbers \mathbb{R} . It is obvious that M is a model of a countably categorical o-minimal theory. Expand the model M by a new binary relation $S(x, y)$ as follows: let $M' := \langle \mathbb{R}, <, S^2 \rangle$ be such that $S(x, y)$ is the graph of the following unary function f , defined as $f(b) = 2b$ for each $b \in \mathbb{Q}$ and $f(c) = -c$ for each $c \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. It is obvious that for each $a \in M$ $S(a, M)$ and $S(M, a)$ are singleton sets, i.e. convex sets. Nevertheless, note that M' is not

weakly o-minimal, since there is no decomposition of the set \mathbf{R} into a finite number of convex sets, on each of which the definable function f is locally monotone or locally constant.

Example 5 Let $M := \langle \mathbf{Q}, < \rangle$ be a linearly ordered structure on the set of rational numbers \mathbf{Q} . It is obvious that M is a countably categorical o-minimal structure. Expand the model M by a new binary relation $E(x, y)$ as follows: let $M' := \langle \mathbf{Q}, <, E^2 \rangle$ be such that for any $a, b \in \mathbf{Q}$

$$E(a, b) \Leftrightarrow (2n-1)\sqrt{2} < a, b < (2n+1)\sqrt{2}$$

for some $n \in \mathbf{Z}$.

Then it is not difficult to understand that $E(x, y)$ is an equivalence relation that partitions \mathbf{Q} into infinitely many infinite convex classes, and E -classes are ordered by the type $\omega^* + \omega$.

It can be proved that M' is a weakly o-minimal structure, but $Th(M')$ is not countable categorical.

Example 6 Let $M := \langle \mathbf{Q} \times \mathbf{Q}, <, E^2 \rangle$ be a linearly ordered structure on the set $\mathbf{Q} \times \mathbf{Q}$, ordered lexicographically. The relation $E(x, y)$ is defined as follows:

$$\text{for any } a = (m_1, n_1), b = (m_2, n_2) \in \mathbf{Q} \times \mathbf{Q} \quad E(a, b) \Leftrightarrow m_1 = m_2.$$

It is obvious that $E(x, y)$ is an equivalence relation that partitions $\mathbf{Q} \times \mathbf{Q}$ into infinitely many infinite convex classes, and the E -classes are ordered by the type \mathbf{Q} .

Extend the universe $\mathbf{Q} \times \mathbf{Q}$ of the structure M by adding two elements to each E -class, which are the left and the right endpoints of the E -class. As a result, we obtain a new structure $M' := \langle M', <, E^2 \rangle$. Consider the reduct of the structure M' to the structure $M'' := \langle M', < \rangle$. It is obvious that M'' is a countably categorical o-minimal structure. Its expansion $M' := \langle M', <, E^2 \rangle$ is a countably categorical linearly ordered structure, but $Th(M')$ is not weakly o-minimal.

Definition 7[8] Let M be weakly o-minimal structure, $A \subseteq M$, M be $|A|^+$ -saturated, $p \in S_1(A)$ non-algebraic.

(1) An A -definable formula $F(x, y)$ is called p -stable, if there exist $\alpha, \gamma_1, \gamma_2 \in p(M)$ such that $F(M, \alpha) \setminus \{\alpha\} \neq \emptyset$ and $\gamma_1 < F(M, \alpha) < \gamma_2$.

(2) A p -stable formula $F(x, y)$ is called *convex to the right (left)*, if there exists $\alpha \in p(M)$ such that $F(M, \alpha)$ is convex, α is the left (right) endpoint of the set $F(M, \alpha)$ and $\alpha \in F(M, \alpha)$.

In Example 5 the formula $F(x, y) := y \leq x \wedge E(x, y)$ is p -stable convex to the right, and the formula $G(x, y) := y \geq x \wedge E(x, y)$ is p -stable convex to the left, where $p(x) := \{x = x\} \in S_1(\emptyset)$.

Let $F_1(x, y), F_2(x, y)$ be p -stable convex to the right (left) formulas. We say that $F_2(x, y)$ is *greater than* $F_1(x, y)$, if there exists $\alpha \in p(M)$ such that $F_1(M, \alpha) \subset F_2(M, \alpha)$.

Definition 8[9] We say that a p -stable convex to the right (left) formula $F(x, y)$ is *equivalence-generating*, if for any $\alpha, \beta \in p(M)$ such that $M \models F(\beta, \alpha)$, the following holds:

$$M \models \forall x \left(x \geq \beta \rightarrow (F(x, \alpha) \leftrightarrow F(x, \beta)) \right) \left(M \models \forall x \left(x \leq \beta \rightarrow (F(x, \alpha) \leftrightarrow F(x, \beta)) \right) \right)$$

Lemma 9[9]. Let M be weakly o-minimal structure, $A \subseteq M$, $p \in S_1(A)$ non-algebraic, M be $|A|^+$ -saturated. Suppose that $F(x, y)$ is a p -stable convex to the right (left) formula, being an equivalence-generating. Then

1) $G(x, y) := F(y, x)$ is a p -stable convex to the right (left) formula, being an equivalence-generating.

2) $E(x, y) := F(x, y) \vee F(y, x)$ is an equivalence relation partitioning $p(M)$ into infinitely many infinite convex classes.

Proposition 10[9] Let T be a countably categorical weakly o-minimal theory, $M \models T$, $A \subseteq M$, $p \in S_1(A)$ be non-algebraic. Then any p -stable convex to the right (left) formula is equivalence-generating.

Example 11 Let $M := \langle \mathbb{Q}, < \rangle$ be a linearly ordered structure on the set of rational numbers \mathbb{Q} . It is obvious that M is a countably categorical 1-indiscernible o-minimal structure. Consider the expansion of the structure M by a new binary relation $R(x, y)$: let $M' := \langle \mathbb{Q}, <, R^2 \rangle$ such that for any $a, b \in \mathbb{Q}$

$$R(a, b) \Leftrightarrow a \leq b < a + \sqrt{2}.$$

It is obvious that $R(a, M')$ and $R(M', a)$ are convex for each $a \in M'$. It can be proved that M' is a 1-indiscernible weakly o-minimal structure.

The formula $F(x, y) := R(y, x)$ is p -stable convex to the right, where $p(x) := \{x = x\} \in S_1(\emptyset)$. It is easy to understand that $F(x, y)$ is not equivalence-generating.

Consider the following formulas:

$$R_2(x, y) := \exists t [R(x, t) \wedge R(t, y)], \quad R_n(x, y) := \exists t [R_{n-1}(x, t) \wedge R(t, y)], n \geq 2$$

For each $a \in M'$ we have

$$R(a, M') \subset R_2(a, M') \subset \dots \subset R_n(a, M') \subset \dots,$$

from which we obtain that $Th(M')$ is not countably categorical.

Let M be a weakly o-minimal structure, $A \subseteq M$, $p \in S_1(A)$ be non-algebraic, $R(x, y)$ be an A -definable formula that is p -stable, i.e. for any $a \in p(M)$ there exist $b_1, b_2 \in p(M)$ such that $b_1 < R(M, a) < b_2$.

By weak o-minimality of M the set $R(M, a)$ is the union of a finite number of convex sets.

It is obvious that each of these sets is $A \cup \{a\}$ -definable. There exists a finite number of such definable convex sets that are to the left of the element a . Denote them by $R_1^l(x, y), \dots, R_s^l(x, y)$, we assume that

$$R_s^l(M, a) > R_{s-1}^l(M, a) > \dots > R_1^l(M, a) \geq a.$$

Similarly, there exists a finite number of definable convex sets that are to the right of the element a . Denote them by $R_1^r(x, y), \dots, R_m^r(x, y)$, we assume that

$$a \leq R_1^r(M, a) < R_2^r(M, a) < \dots < R_m^r(M, a).$$

Perhaps there exists a definable convex set whose interior contains an element a . Denote it by $R^c(x, y)$. Thus, if $R^c(M, a) \neq \emptyset$, then there exists $b_1, b_2 \in R^c(M, a)$ such that $b_1 < a < b_2$.

Define the following formulas:

$$F^c(x, y) := y \leq x \wedge R^c(x, y)$$

$$G^c(x, y) := y \geq x \wedge R^c(x, y)$$

$$F_i^r(x, y) := y \leq x \wedge \forall t [R_i^r(t, y) \rightarrow x < t], 1 \leq i \leq m$$

$$F_i^{r*}(x, y) := y \leq x \wedge \exists t [R_i^r(t, y) \wedge x \leq t], 1 \leq i \leq m$$

$$G_j^l(x, y) := y \geq x \wedge \forall t [R_j^l(t, y) \rightarrow t < x], 1 \leq i \leq s$$

$$G_j^{l*}(x, y) := y \geq x \wedge \exists t [R_j^l(t, y) \wedge t \leq x], 1 \leq i \leq s$$

It is obvious that $F^c(x, y), F_i^r(x, y), F_i^{r*}(x, y), 1 \leq i \leq m$ are p -stable convex to the right and formulas $G^c(x, y), G_j^l(x, y), G_j^{l*}(x, y), 1 \leq j \leq s$, are p -stable convex to the left.

We say that the formula $R(x, y)$ is *equivalence-generatable*, if every non-trivial formula in the set $\Delta := \{F^c(x, y), F_i^r(x, y), F_i^{r*}(x, y), G^c(x, y), G_j^l(x, y), G_j^{l*}(x, y) | 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq s\}$ is equivalence-generating.

Example 12 Let $M := \langle \mathbf{Q} \times \mathbf{Q}, < \rangle$ be a linearly ordered structure on the set $\mathbf{Q} \times \mathbf{Q}$, ordered lexicographically. It is obvious that M is a countably categorical o-minimal structure.

We introduce the following two binary formulas $E(x, y)$ and $R_1(x, y)$ on the set $\mathbf{Q} \times \mathbf{Q}$: for any $a = (m_1, n_1), b = (m_2, n_2) \in \mathbf{Q} \times \mathbf{Q}$

$$E(a, b) \Leftrightarrow m_1 = m_2$$

$$R_1(a, b) \Leftrightarrow m_1 = m_2 \wedge n_1 \leq n_2 < n_1 + \sqrt{2}$$

Let $R(x, y) := y \leq x \wedge E(x, y) \wedge \neg R_1(x, y)$ and $M' := \langle \mathbf{Q} \times \mathbf{Q}, <, R^2 \rangle$ is an expansion of the model M by binary predicate $R(x, y)$. It is obvious that for any $a \in M'$ $R(M', a)$ is convex and $a < R(M', a)$.

It can be established that M' is a 1-indiscernible weakly o-minimal structure, but $Th(M')$ is not countably categorical.

Consider the following formulas:

$$F_1(x, y) := y \leq x \wedge \forall t [R(t, y) \rightarrow x < t]$$

$$F_2(x, y) := y \leq x \wedge \exists t [R(t, y) \wedge x \leq t]$$

Formulas $F_1(x, y), F_2(x, y)$ are p -stable convex to the right, where $p(x) := \{x = x\} \in S_1(\emptyset)$, here $F_2(x, y)$ is equivalence-generating, and $F_1(x, y)$ is not equivalence-generating. Hence, the predicate $R(x, y)$ is not equivalence-generatable.

Theorem 13 Let M be an 1-indiscernible countably categorical weakly o-minimal structure of convexity rank 1, M' is an 1-indiscernible weakly o-minimal expansion of the structure M by a binary predicate $R(x, y)$.

Then $Th(M')$ is countably categorical if and only if the following conditions are satisfied:

- (1) $R(x, y)$ and $L(x, y) := R(y, x)$ are equivalence-generatable;
- (2) For every \emptyset -definable equivalence relation $E(x, y)$, generated by the predicate $R(x, y)$, the set of E -classes is densely ordered.

Proof of Theorem 13. (\Rightarrow) Suppose that $Th(M')$ is countably categorical. Consider the predicate $R(x, y)$. Due to the weak o-minimality of structure M' for any $a \in M'$ $R(M', a)$ and $R(a, M')$ are unions of a finite number of convex sets. By the Proposition 10 both formulas $R(x, y)$ and $L(x, y)$ must be equivalence-generatable.

Let $E(x, y)$ be an arbitrary \emptyset -definable equivalence relation. By the 1-indiscernibility the set of E -classes must be either densely ordered without endpoints, or discretely ordered without endpoints.

Whence by countable categoricity, the set of E -classes must be densely ordered.

(\Leftarrow) Let $R(x, y)$ and $L(x, y)$ be equivalence-generatable formulas. Consider an arbitrary \emptyset -definable equivalence relation, generated by the predicate $R(x, y)$. By the hypothesis, the set of E^* -classes is densely ordered. By 1-indiscernibility there is neither a leftmost E^* -class nor a rightmost E^* -class. Also, by 1-indiscernibility, there is no E^* -class having at least one endpoint (if every E^* -class had at least one endpoint, we would have a contradiction with the weak o-minimality of M').

By weak o-minimality of structure M' for any $a \in M'$ $R(M', a)$ and $R(a, M')$ are unions of a finite number of convex sets. Therefore, there are only finitely many formulas of the form $F^c(x, y)$, $F_i^r(x, y)$, $F_i^{r*}(x, y)$, $G^c(x, y)$, $G_j^l(x, y)$, $G_j^{l*}(x, y)$, $1 \leq i \leq n_1$, $1 \leq j \leq n_2$ for some $n_1, n_2 < \omega$. Since by the hypothesis $R(x, y)$, $L(x, y)$ are equivalence-generatable formulas, then each non-trivial formula from the list $\Delta := \{F^c(x, y), F_i^r(x, y), F_i^{r*}(x, y), G^c(x, y), G_j^l(x, y), G_j^{l*}(x, y) \mid 1 \leq i \leq n_1, 1 \leq j \leq n_2\}$ generates an equivalence relation. Thus, we obtain only a finite number of \emptyset -definable equivalence relations generated by the predicate $R(x, y)$.

Let $\{E_1(x, y), E_2(x, y), \dots, E_n(x, y)\}$ be a complete list of \emptyset -definable equivalence relations, generated by the predicate $R(x, y)$. By 1-indiscernibility there is no i, j such that $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq n$ and for some $a \in M'$ $E_i(a, M') \subset E_j(a, M')$, $\sup E_j(a, M') = \sup E_i(a, M')$ or $\inf E_i(a, M') = \inf E_j(a, M')$.

Also there do not exist such $i, j \in \{1, \dots, n\}$ that for some $a \in M'$ $E_i(a, M') \setminus E_j(a, M') \neq \emptyset$ and $E_j(a, M') \setminus E_i(a, M') \neq \emptyset$.

Further, for any $1 \leq i, j \leq n$ if there exists $a \in M'$ such that $E_i(a, M') \subseteq E_j(a, M')$, then for any $a \in M'$ $E_i(a, M') \subseteq E_j(a, M')$. Thus, there is $1 \leq m \leq n$ (it is possible the situation when for some $i, j \in \{1, \dots, n\}$ $E_i(a, M') = E_j(a, M')$) and possibly some renumbering of the existing equivalence relations in such a way that for any $a \in M'$ we would have

$$E_1(a, M') \subset E_2(a, M') \subset \dots \subset E_m(a, M').$$

Since, by the hypothesis, the set of E -classes is densely ordered for each \emptyset -definable equivalence relation $E(x, y)$, then E_i -subclasses of each E_{i+1} -class are densely ordered without endpoints, where $0 \leq i \leq m$ and

$$E_0(x, y) := x = y, \quad E_{m+1}(x, y) := x = x \wedge y = y.$$

Further, it can be established by standard methods that $Th(M')$ admits elimination of quantifiers up to atomic formulas and formulas $E_i(x, y)$, $1 \leq i \leq m$, whence we obtain that $Th(M')$ is countably categorical.

REFERENCES

- [1] Macpherson H.D., Marker D. and Steinhorn C. Weakly o-minimal structures and real closed fields, Transactions of The American Mathematical Society, volume 352 (2000), pp. 5435–5483.
- [2] Kulpeshov B.Sh. Weakly o-minimal structures and some of their properties, The Journal of Symbolic Logic, volume 63 (1998), pp. 1511–1528.
- [3] Baizhanov S.S., Kulpeshov B.Sh. Invariant properties at expanding models of quiteo-minimal theories, News of National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan, series physical-mathematical, No.1 (311), 2017, pp. 65-71.
- [4] Baizhanov S.S., Kulpeshov B.Sh. Expansion of models of quiteo-minimal theories by unary predicates, Theses of the annual scientific conference of Institute of Mathematics and Mathematical Modelling CSMESRK, Almaty, 2017, pp. 16-18.
- [5] Baizhanov S.S., Kulpeshov B.Sh. Expansion of models of countably categorical weakly o-

minimaltheoriesbyunarypredicates, Thesesoftheinternationalconference"Actual Problems of Pure and Applied Mathematics" devoted to the 100-anniversary of academician A.D. Taimanov, Almaty, 2017, pp. 13-15.

[6] Baizhanov B.S. Expansion of a model of a weakly o-minimal theory by a family of unary predicates, The Journal of Symbolic Logic, volume 66 (2001), pp. 1382–1414.

[7] Kulpeshov B.Sh. Countably categorical quite o-minimal theories, Journal of Mathematical Sciences, volume 188, issue 4 (2013), pp. 387–397.

[8] Baizhanov B.S. One-types in weakly o-minimal theories, Proceedings of Informatics and Control Problems Institute, Almaty, 1996, pp. 75–88.

[9] Baizhanov B.S., Kulpeshov B.Sh. On behaviour of \mathcal{L} -formulas in weakly o-minimal theories, Mathematical Logic in Asia, Proceedings of the 9th Asian Logic Conference (editors S. Goncharov, R. Downey, H. Ono), Singapore, World Scientific, 2006, pp. 31–40.

С.С. Байжанов¹, Б.Ш. Кулпешов²

¹Математика және математикалық модельдеу институты, Алматы, Қазақстан;

²Халықаралық ақпараттық технологиялар университеті, Алматы, Қазақстан

БИНАРЛЫ ПРЕДИКАТТАРМЕН ЕСЕПТІК-КАТЕГОРИЯЛЫҚ БОСАҢ О-МИНИМАЛДЫҚ ТЕОРИЯЛАР БАЙЫТУ ТУРАЛЫ

Аннотация. Осы жұмыста кез келген бинарлы предикатпен 1-анықталмалы есептік-категориялық босаң о-минималды құрылымдар байыту кезінде теориятикалық-модельдік қасиеттерді сақталу сұрақтары зерттеленді. Осының алдында унарлы предикаттармен есептік-категориялық босаң о-минималды теорияларды байыту кезінде теориятикалық-модельдік қасиеттерді сақталу сұрақтары зерттеленді. Эквиваленттік-қалыптасқан формула түсінігі енгізілді: егер $R(x, y)$ – кейбір алгебралық емес 1-тип p үшін p -стабильді формула болса, онда $R(x, y)$ эквиваленттік-қалыптасқан формула деп аталады егер кез келген p -стабильді оң жаққа қарай дөңесті немесе сол жаққа қарай дөңесті формуласы $R(M, a)$ жиынтығының максималды дөңес шекарасынан қалыптастырылған кейбір $a \in p(M)$ эквиваленттік-өрнекті болады. Енгізілген эквиваленттік-қалыптасқан формула түсінік терминдермен дөңестік рангісі 1 1-анықталмалы есептік-категориялық босаң о-минималды құрылымдарды 1-анықталмалы босаң о-минималды байытында есептік категориялықты сақтау критерийі алынды.

Тірек сөздер: босаң о-минималдық, есептік категориялық, 1-анықталмаушылық, модельдер байыту, эквиваленттік-өрнекті формула, эквиваленттік қатынасы.

С.С. Байжанов¹, Б.Ш. Кулпешов²

¹Институт математики и математического моделирования, Алматы;

²Международный университет информационных технологий, Алматы

ОБ ОБОГАЩЕНИИ СЧЕТНО КАТЕГОРИЧНЫХ СЛАБО О-МИНИМАЛЬНЫХ ТЕОРИЙ БИНАРНЫМИ ПРЕДИКАТАМИ

Аннотация. В настоящей работе исследуются вопросы сохранения теоретико-модельных свойств при обогащениях 1-неразличимых счетно категоричных слабо о-минимальных структур произвольным бинарным предикатом. Ранее исследовались вопросы сохранения теоретико-модельных свойств при обогащениях счетно категоричных слабо о-минимальных теорий унарными предикатами. Введено понятие эквивалентность-генерируемой формулы: если $R(x, y)$ – p -стабильная формула для некоторого неалгебраического 1-типа p , то $R(x, y)$ называется эквивалентность-генерируемой формулой, если любая p -стабильная выпуклая вправо или влево формула, образованная из максимальных выпуклых подмножеств множества $R(M, a)$ для некоторого $a \in p(M)$ является эквивалентность-генерирующей. В терминах вновь введенного понятия эквивалентность-генерируемой формулы получен критерий сохранения счетной категоричности 1-неразличимого слабо о-минимального обогащения бинарным предикатом 1-неразличимых счетно категоричных слабо о-минимальных структур ранга выпуклости 1.

Ключевые слова: слабая о-минимальность, счетная категоричность, 1-неразличимость, обогащение моделей, эквивалентность-генерирующая формула, отношение эквивалентности.

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 1, Number 317 (2018), 25 – 33

UDC 539.3

Zhumakhanova A.S.¹, Nogaybaeva M.O.², Askarova A.³,
Arshidinova M.T.³, Begaliyeva K.B.³, Kudaykulov A.K.³, Tashev A.A.³

¹Kazakh agrarian-technical university named after S.Seifullin, Astana, Kazakhstan;

²Institute of Mechanics and Engineering Science named after academician U.A. Dzholdasbekov;

³Institute of Information and Computing Technologies CS MES RK

zhuldyz_tm@mail.ru, kzldkz@gmail.com, kmiraj82@mail.ru

**AN ANALYTICAL SOLUTION TO THE PROBLEM OF THE
THERMOMECHANICAL STATE OF A ROD OF LIMITED LENGTH
WITH SIMULTANEOUS PRESENCE OF END TEMPERATURES
AND LATERAL HEAT EXCHANGE**

Abstract. This article deals with the problems of numerical study of the thermomechanical state of rods. On the basis of the fundamental law on the change in the amount of heat, an equation of the established thermal conductivity for a horizontal rod of limited length and a constant cross section is constructed through a fixed cross-section in a time $\partial\tau$. In this case, different temperatures are set at the two ends of the investigated rod, and heat exchange with the surrounding medium takes place through the lateral surface. In addition, the investigated rod is made of thermal protective material ANV-300. The determining law of the distribution of temperature, of all the corresponding deformations and stresses, and also of the displacement along the length of the investigated rod. The values of the thermal elongation and the resulting axial force are calculated.

Keywords: temperature, rod, thermal energy, algorithm.

In a complex thermal zone, bearing components of reactive and hydrogen engines, nuclear and thermal power stations, processing lines of processing industries, as well as internal combustion engines operate. The reliable operation of these structures will depend on the conditions of the thermoelectric power of the bearing components. Therefore, this study is devoted to a numerical study of the state of the thermoelectric power of the structural components in the form of rods of limited length, bounded at both ends.

The proposed computational algorithm is based on the principle of energy conservation. In this case, all types of integrals in the functional energy formulas are integrated analytically. In this case, the numerical solutions obtained will have high accuracy.

1. Statement of the problem

We consider a horizontal rod of limited length and a constant crossed section which area is $F(\text{cm}^2)$. The axis ox of the rod is directed from the left to the right which coincides with the axis of the rod. At the left end of the rod, the temperature $T_1[\text{c}^0]$, is given, and the direction $T_2[\text{c}^0]$. In this case $T_1 > T_2$. Through the lateral surface of the rod, heat exchange takes place with its surrounding medium. In this case, the heat transfer coefficient $h \left[\frac{\text{watt}}{\text{cm}^2 \cdot \text{c}^0} \right]$, and the ambient temperature $T_{oc}[\text{c}^0]$. The calculation scheme of the process is shown in Fig. 1

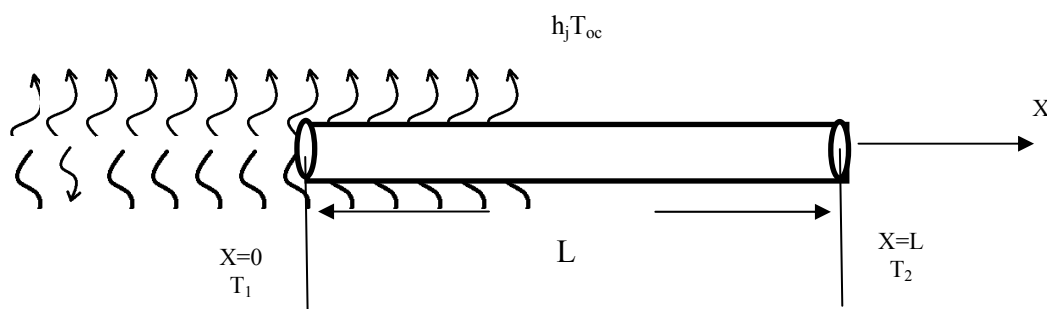


Figure 1 - The calculation scheme of the problem

It is required to determine:

- 1) The law of temperature distribution along the length of the investigated rod.
- 2) The amount of thermal elongation of the test rod.

In case of pinching the two ends of the rod, it is necessary to determine:

- 3) The arising axial forces.
- 4) The field of distribution of the components of deformations and stresses.
- 5) The field of distribution of displacement.

The physical and mechanical properties of the material of the rod under investigation are characterized by the coefficients of thermal conductivity $K_{xx} \left[\frac{\text{watt}}{\text{cm}^2 \cdot \text{c}^0} \right]$, thermal expansion $\alpha \left[\frac{1}{\text{c}^0} \right]$ and elastic modulus $E \left[\frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} \right]$. If we take into account that the investigated process of the rod material is much larger than the cross-sectional area, then it is possible to neglect the temperature gradients in the directions perpendicular to the axis of the rod without significant error, and take the temperature constant at each point of the cross section perpendicular to the axis. With this assumption, a temperature with a function of only one independent variable x , and the field of temperature distribution along the length of the rod can be described by an ordinary differential equation.

According to the fundamental law of thermophysics, the amount of heat passing through the time dt through the cross sections of the rod at a distance of x [cm] from its left end will be

$$-K_{xx}F \frac{dT}{dx} d\tau \quad (1)$$

where $T(x)$ – is the temperature distribution field, which is still unknown.

At that time, the amount of heat passing through the time dt through the cross section, located at a distance $x + dx$ [cm] from the left end of the rod, will be equal to

$$-K_{xx}F \left(\frac{dT}{dx} + \frac{d^2T}{dx^2} dx \right) d\tau \quad (2)$$

In addition, the portion of the rod enclosed between the sections spaced from the left end of the rod at a distance of x and $x + dx$ [cm], due to the thermal conductivity process, acquires during the time dt the amount of heat equal to the difference of the indicated quantities (1) and (2) e.

In addition, the portion of the rod enclosed between the sections spaced from the left end of the rod at a distance of x and $x + dx$ [cm], following the heat conduction process, acquires in the time dt the amount of heat equal to the difference of the indicated amounts (1) and (2),

$$K_{xx}F \frac{d^2T}{dx^2} d\tau \quad (3)$$

It should also be noted that during this same time, a heat loss is equal to

$$hPdx(T - T_{0c})d\tau \quad (4)$$

where P [cm] is the cross sectional.

But since the process we are investigating is steady-state, i.e. stationary, then from (3-4) we have

$$K_{xx}F \frac{d^2T}{dx^2} dx d\tau = hP dx (T - T_{oc}) d\tau \quad (5)$$

From this, for the problem under consideration, we determine the equation for the steady-state heat conductivity

$$\frac{d^2T}{dx^2} = \frac{hP(T - T_{oc})}{K_{xx}F} \quad (6)$$

For convenience, we introduce the notation

$$a^2 = \frac{hP}{K_{xx}F} \quad (7)$$

considering that the ambient temperature $T_{oc} = const, 0 \leq x \leq l$, then we have

$$\frac{d(T - T_{oc})}{dx} = \frac{dT}{dx} \quad (8)$$

hence we also obtain

$$\frac{d^2T}{dx^2} = \frac{d^2(T - T_{oc})}{dx^2}, \quad 0 \leq x \leq l \quad (9)$$

Taking (7) and (9) into account, we rewrite (6)

$$\frac{d^2(T - T_{oc})}{dx^2} - a^2(T - T_{oc}) = 0 \quad (10)$$

This equation is an ordinary differential equation with constant coefficients. Then its general integral will be

$$T - T_{oc} = C_1 e^{ax} + C_2 e^{-ax}, \quad 0 \leq x \leq l \quad (11)$$

where C_1 and C_2 are constants of integration. Their values are determined from the boundary conditions at the ends of the rod.

$$T(x = 0) = T_1[c^0]; T(x = l) = T_2[c^0]; \quad (12)$$

$$\left. \begin{aligned} T_1 - T_{oc} &= C_1 + C_2 \\ T_2 - T_{oc} &= C_1 e^{al} + C_2 e^{-al} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

From these systems, the values C_1 and C_2 .

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= \frac{(T_2 - T_{oc}) - (T_1 - T_{oc})e^{-al}}{2sh(al)} \\ C_2 &= \frac{(T_1 - T_{oc})e^{al} - (T_2 - T_{oc})}{2sh(al)} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Substituting (14) into (11), we determine the field of temperature distribution along the length of the rod under consideration, taking into account the operating conditions [2]

$$T(x, h, K_{xx}, P, F, T_{oc}) = T_{oc} + \frac{(T_2 - T_{oc})sh(ax) + (T_1 - T_{oc})sha(l-x)}{sh(al)}, 0 \leq x \leq l \quad (15)$$

On the basis of the fundamental theory of thermal physics, it is possible to determine the elongation of the rod under consideration if it is pinched by one end and the other is free

$$\Delta l_T = \int_0^l \alpha T(x) dx = \alpha \int_0^l T(x) dx = \alpha \{ T_{oc} l + [(T_2 - T_{oc})(ch(al) - 1)/a - (T_1 - T_{oc})(1 - ch(al)/a)] / sh(al) \} \quad (16)$$

In the event that both ends of the rod are clamped, an axial compressive force R is produced in it, which will be directed along its axis ox. Its value is determined by the corresponding Hooke law [3]

$$R = -\frac{N_T EF}{l} = -\frac{\alpha EF}{l} \{ T_{oc} l + [(T_2 - T_{oc})(ch(al) - 1)/a - (T_1 - T_{oc})(1 - ch(al)/a)] / sh(al) \} \quad (17)$$

In this case, according to the length of the investigated rod, the distribution law of the thermoelastic component of the voltage t can be determined according to the generalized Hooke law

$$\sigma = \frac{R}{F} = -\frac{\alpha E}{l} \{ T_{oc} l + [(T_2 - T_{oc})(ch(al) - 1)/a - (T_1 - T_{oc})(1 - ch(al)/a)] / sh(al) \} \quad (18)$$

Then the distribution law of the corresponding thermo-elastic component of the deformation is also determined according to Hooke law

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = -\frac{\alpha}{l} \{ T_{oc} l + [(T_2 - T_{oc})(ch(al) - 1)/a - (T_1 - T_{oc})(1 - ch(al)/a)] / sh(al) \} \quad (19)$$

Further, according to the theory of thermal physics, the law of distribution of the temperature component of deformation

$$\varepsilon_T(x) = -\alpha T(x) = -\alpha \left\{ T_{oc} + \frac{(T_2 - T_{oc})sh(ax) + (T_1 - T_{oc})sha(l-x)}{sh(al)} \right\}, 0 \leq x \leq l \quad (20)$$

Then the temperature component of the voltage is already determined according to Hooke law

$$\sigma_T(x) = E \varepsilon_T(x) = -\alpha E \left\{ T_{oc} + \frac{(T_2 - T_{oc})sh(ax) + (T_1 - T_{oc})sha(l-x)}{sh(al)} \right\}, 0 \leq x \leq l \quad (21)$$

After this, according to the theory of thermo elasticity, it is possible to determine the law of distribution of the elastic component of deformation

$$\varepsilon_x(x) = \varepsilon - \varepsilon_T(x) = -\frac{\alpha}{l} \{ T_{oc} l + [(T_2 - T_{oc})(ch(al) - 1)/a - (T_1 - T_{oc})(1 - ch(al)/a)] / sh(al) \} + \alpha \left\{ T_{oc} + \frac{(T_2 - T_{oc})sh(ax) + (T_1 - T_{oc})sha(l-x)}{sh(al)} \right\}, 0 \leq x \leq l \quad (22)$$

Then, according to Hooke law, we can determine the law of distribution of the elastic component of the voltage

$$\sigma_x(x) = E\varepsilon_x(x) = \sigma - \sigma_T(x) = -\frac{\alpha E}{l} \left\{ T_{oc} l + [(T_2 - T_{oc})(ch(al) - 1)/a - (T_1 - T_{oc})(1 - ch(al)/a)] / sh(al) \right\} + \alpha E \left\{ T_{oc} + \frac{(T_2 - T_{oc})sh(ax) + (T_1 - T_{oc})sh(a(l-x))}{sh(al)} \right\}, 0 \leq x \leq l \quad (23)$$

Finally, we can determine the law of distribution of the displacement of the cross-section of the rod. It is determined from the Cauchy relations

$$\varepsilon_x(x) = \frac{\partial u}{\partial x}; \Rightarrow U = \int \varepsilon_x(x) dx + C \quad (24)$$

Here the value of the constant C is determined from the pinning conditions $U(x=0) = 0$. Then we have

$$U(x) = -\alpha \left[T_{oc} + \frac{chal - 1}{alshal} (T_1 + T_2 - 2T_{oc}) \right] x + \alpha \left\{ T_{oc} x + \frac{1}{ashal} [(T_2 - T_{oc})chax - (T_1 - T_{oc})] \right\} + \frac{\alpha}{ashal} [(T_1 - T_{oc})chal - (T_2 - T_{oc})] \quad (25)$$

Then we have $l = 100 \text{ cm}$, $K_{xx} = 100 \frac{\text{Br}}{\text{cm}^2 \text{C}^0}$; $h = 10 \frac{\text{Br}}{\text{cm}^2 \text{C}^0}$; $T_{oc} = 20^0 \text{C}$; $\alpha = 125 \cdot 10^{-7} \frac{1}{\text{C}^0}$; $E = 2 \cdot 10^6 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$; $T_1 = 600^0 \text{C}$; $T_2 = 100^0 \text{C}$; $r = 1 \text{ cm}$.

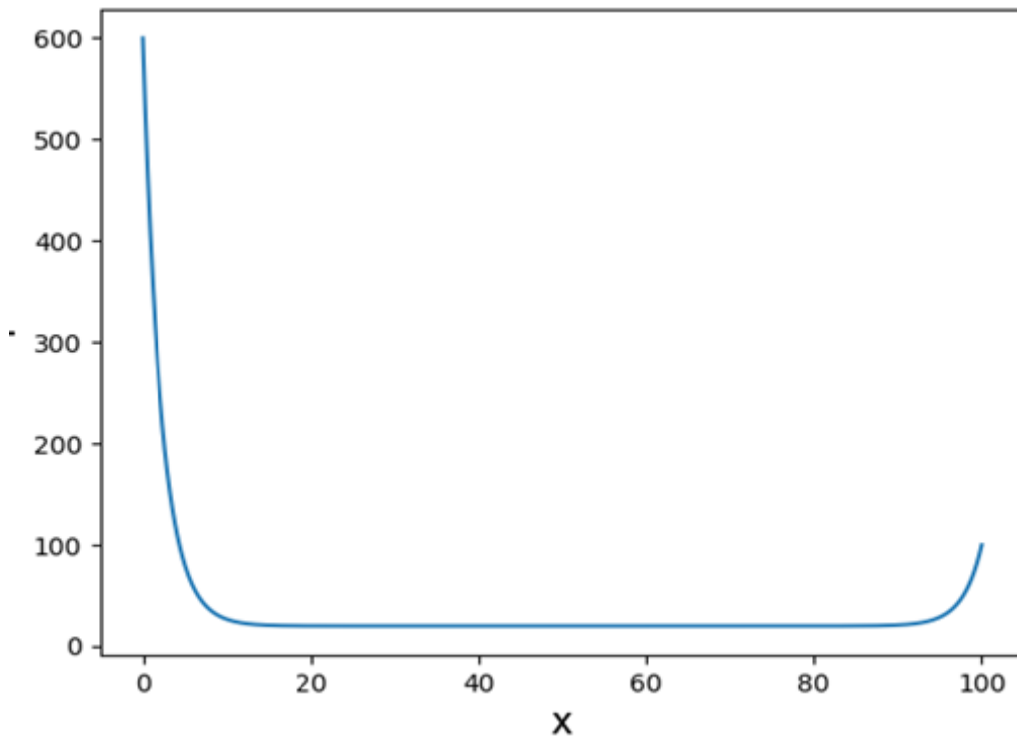
Then we get the results shown in Figure-2. In Figure-2, a) the law of the distribution of temperature along the length of the rod is given. The resulting law of distribution of deformation components is given in Figure-2, b). It can be seen from the figure that the thermo-elastic component of the deformation ε is constant along the entire length of the rod.

At that time, the elastic component of the deformation $\varepsilon_x(x)$, on stretches near the jamming, has a stretching character. In the middle section of the rod, $\varepsilon_x(x)$ has a compressive character. The temperature component of the deformation $\varepsilon_T(x)$ along the entire length has a compressive character. Its maximum value corresponds to the highest temperature.

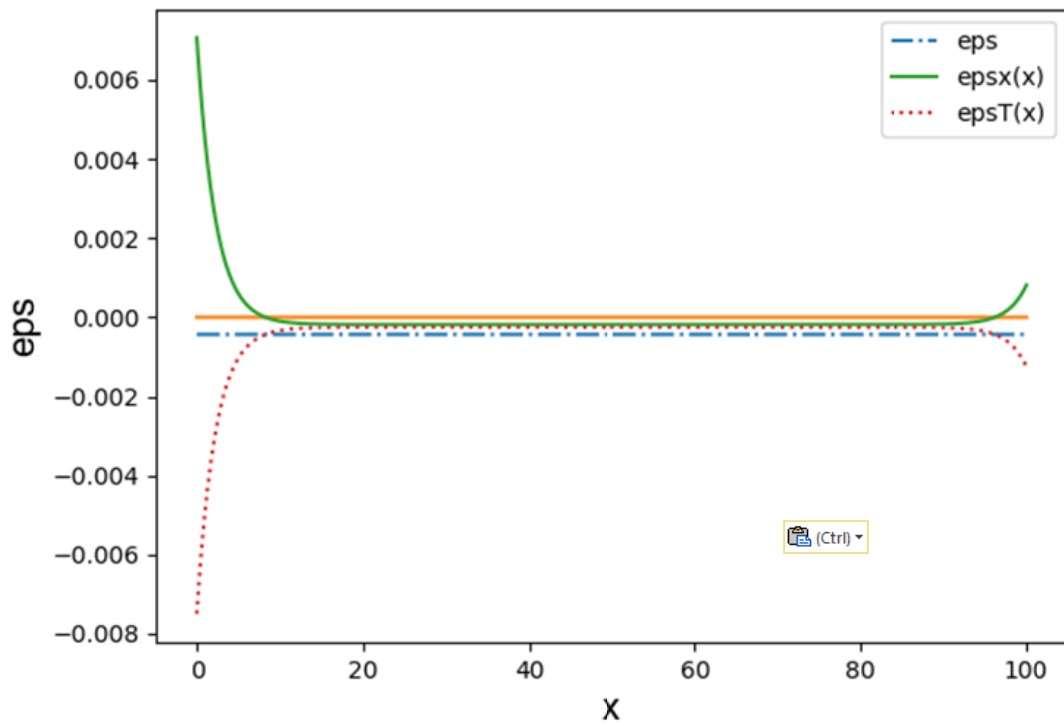
The nature of the component stresses is similar to the corresponding deformations. This is clearly seen from Figure-2, c). In Figure-2, d) the distribution field for the displacement of the cross-sections of the rod is given. It can be seen from the figure that the cross-sections of the rod in section $0 < x \leq 6,9$ are moving in the direction of the x axis. At that time, the largest displacement $U_{max1} = 0.0043092 \text{ cm}$ corresponds to the coordinate cross-section of which $x = 8 \text{ cm}$;

The cross sections of the rod located in the section $70 < x < 100 \text{ cm}$ move against the direction of the axis ox. Here, the largest displacement $U_{max2} = -0,0016472 \text{ cm}$ corresponds to a cross section whose coordinate is $x = 94 \text{ cm}$. Moreover, $|U_{max1}|/|U_{max2}| = 2,61639$;

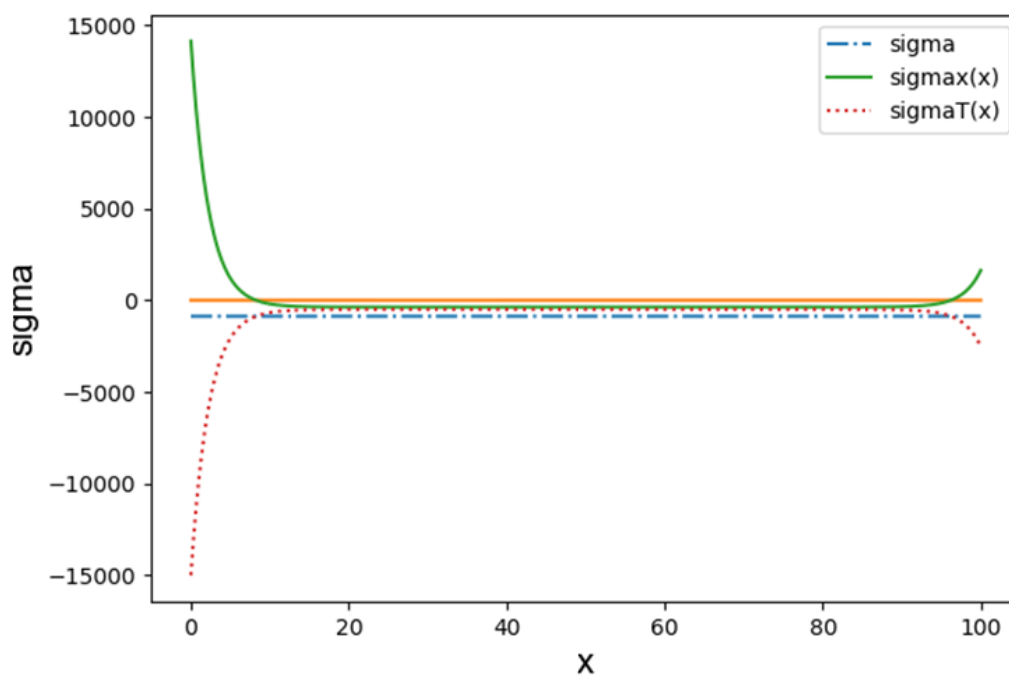
a) The temperature



b) the deformation



c) voltage



d) move

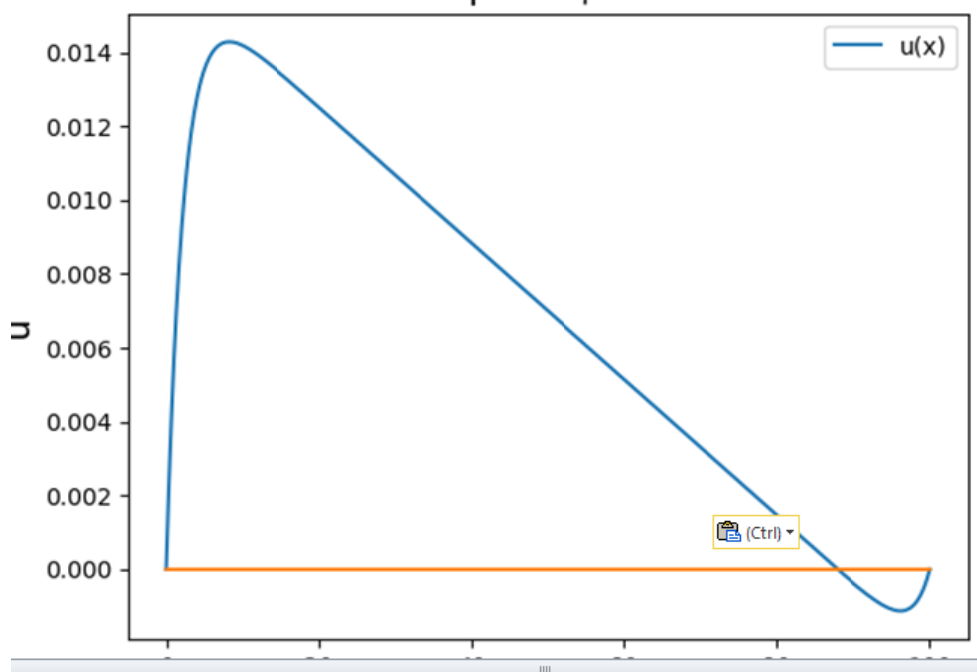


Figure - 2. The laws of distribution of temperatures, strains, stresses and displacements

REFERENCES

- [1] Kudaykulov A.K.,Kenzhegul B.Z., Myrzasheva A.N.*Science and new technologies, Bishkek,2009*, 5, 17-22. (in Russ.).
- [2] Kudaykulov A.K., Tuleuova R.,Amirtaev K.B., Tokkuliev B.M.*Proceedings Fifth All-Russian Scientific Conference with international participation (29-31 May 2008).Part 1 Mathematical models of mechanics, strength and reliability of structural elements, Mat. modeling and edges. tasksSamGTU, Samara, 2008*, 161-164. (in Russ.).

- [3] Kudaykulov A.K., Mathematical (finite element) modeling of applied problems of heat distribution in one-dimensional structural elements. *Turkestan: Baiterek*. 2009, 168p. (in Russ.).
- [4] KENZHEGUL B.Z., KUDAYKULOV A.K., MYRZASHEVA A.N. *Proceedings of the universities. - Bishkek*, 2009, 4, 3-7. (in Russ.).
- [5] Tashenova J.M., Nurlybaeva E.N., Zhumadillaeva A.K., Kudaykulov A.K. *Fundamental'nyye issledovaniya*. 2012, 3-3, 660-664. (in Russ.).
- [6] Ivanov A.S. The mathematical analogy in continuum mechanics. Monograph. *Moscow, Moscow State Open University*, 2009 180p. (in Russ.).
- [7] X. Gu, X. Dong, M. Liu, Y. Wang. *Heat Transfer-Asian Research, Wiley Online Library*. 2012 (in Eng.).
- [8] Aytaliev Sh.M., Kudaykulov A.K., Mardonov B. Mechanics sticking bruiilnyh columns in oil and gas wells. *Atyrau-Almaty: Publishing "Evreux"*, 1999, 82p. (in Russ.).
- [9] Chernyaeva T. P., Ostapov A. V. *Problems of Atomic Science and Technology. Ser. Physics of Radiation Effect and Radiation Material Science*, 2013, (87) 5, 16. (in Eng.).
- [10] Zelensky V. F., *Problems of Atomic Science and Technology. Ser. Nuclear Physics Investigations* 2013 (85) 3, 76 (in Eng.).
- [11] M.L.F. Lerch, M. Petasecca, A. Cullen et al., *Radiation Measurements* 46, 1560 (2011). Gestrin S.G. Localization of Frenkel excitons on dislocations. *Gestrin, A.N. Salnikov. News of universities. Physics*. 2005. № 7. P. 23-25. (in Eng.).
- [12] Bezshyiko A., Vyshnevskiy I.M., Denisenko R.V. et al., *Nucl. Phys. At. Energy* 2011, 12, 4, 400 (in Eng.).
- [13] Gestrin S.G., Salnikov A.N. *News of universities. Physics*. 2005, 7, 23-25. (in Eng.).
- [14] Tungatarov A., Akhmed-Zaki D.K.. *Int. J. of Mathematical Analyses*. 2012, 6, 14, 695-699. (in Eng.).
- [15] Meirmanov A., *Mathematical models for poroelastic flows, Atlantis Press. Paris*, 2013, 478 p. (in Eng.).
- [16] Kulpeshov B.Sh., Macpherson H.D., Minimality conditions on circularly ordered structures. *Mathematical Logic Quarterly*. 2005, 51, 377-399. (in Eng.).
- [17] Kulpeshov B.Sh., On \aleph_0 -categorical weakly circularly minimal structures. *Mathematical Logic Quarterly*, 2006, 52, 6, 555-574. (in Eng.).
- [18] Yerofeyev V.L., Semenov P.D. *M.: ICC Akademkniga*. 2006, 488p. (in Russ.).
- [19] V.N. Lukanin. *Teplotekhnika. M.: Vysshayashkola*. 2002, 671p. (in Russ.).
- [20] Nozdrev V.F. *Course of thermodynamics. Moscow: Mir*, 1967, 247 p. (in Russ.).

**А.С. Жумаханова¹, М.О. Ноғайбаева², А. Асқарова³,
М.Т. Аршидинова³, К.Б. Бегалиева³, А.К. Кудайкулов³, А.А. Ташев³**

¹С. Сейфуллин атындағы қазақ агротехникалық университеті, Астана, Қазақстан;

²ҚР БҒМ ҒАУ. А. Жолдасбеков атындағы механика және машинатану институты;

³ҚР БҒМ ҒАА қпараттық және есептеу технологиялары институты

ҰЗЫНДЫҒЫ ШЕКТЕУЛІ ТҰРАҚТЫ ТЕРМОМЕХАНИКАЛЫҚ КҮЙДІҢ БІР МЕЗГІЛДЕ ШЕКТІК ТЕМПЕРАТУРАНЫҢ ЖӘНЕ БҮЙІРЛІК ЖЫЛУ АЛМАСУ ӘСЕРІ ЕСЕБІН ТАЛДАМАЛЫҚ ШЕШУ

Аннотация. Бұл мақалада өзектің термомеханикалық күйін сандық зерттеу проблемалары қарастырылады.

Көптеген өндіріс орындарында негізгі құрылым элементтері күрделі жылу көздері әсерінде тұрақты жұмыс жасайды. Өндірістің үздіксіз жұмыс жасауы әрине сол элементтердің сынып қалмауына тікелей байланысты. Сондықтанда алдын – ала негізгі құрылым элементтердің әр түрлі жылу көздері әсерінде қандай термо-механикалық жағдайда болуын терең зерттеу өндірістің үздіксіз, тұрақты, сапалы жұмыс жасау тұрғысынан өте өзекті мәселе болып табылады.

Әт уақытта тұрақты көлденең қима арқылы өтетін жылу мөлшерінің өзгеруі туралы іргелі заңның негізінде шекті ұзындықты және қимасы тұрақты көлденең өзектің жылу өткізгіштігінің теңдеуін құруға болады.

Бұл жағдайда қарастырылған өзектің екі ұшында әртүрлі температура белгіленеді, ал қоршаған ортамен жылу алмасуы бүйірлік бет арқылы өтеді. Сонымен қатар, зерттелетін өзек ANV-300 термиялық қорғаныш материалынан жасалған. Барлық орын алатын деформациялар мен кернеулерге байланысты, сондай-ақ зерттелген өзектің ұзындығы бойынша қозғалу кезіндегі температура таралуын анықтайтын заң. Жылулық ұзартудың және осьтік күштің мәндері есептеледі.

Реактивті және сутегі қозғалтқыштарының компоненттері, ядролық және жылу электр станциялары, өңдеу өнеркәсібінің өңдеу желілері, сондай-ақ ішкі жану қозғалтқыштары бар күрделі жылу аймағында жұмыс істейді. Осы құрылымдардың сенімді жұмыс істеуі мойынтіректер компоненттерінің термоэлектрлік қуатына байланысты болады. Демек, бұл зерттеу екі жағында шектелген шектеулі ұзындықтағы өзектер түріндегі құрылымдық компоненттердің термоэлектрлік қуатының жай-күйін сандық зерттеуге арналған.

Ұсынылған есептеу алгоритмі энергия үнемдеу принципіне негізделген. Бұл жағдайда функционалдык энергетикалық формулалардағы интегралдардың барлық түрлері аналитикалық түрде интегралданған. Бұл жағдайда алынған сандық шешімдер жоғары дәлдікке ие болады.

Тірек сөздер: жылу ағыны, жылу беру, жылу өткізгіштік, жылу алмасу, жылу окшаулау.

А.С. Жумаханова¹, М.О. Ногайбаева², А. Аскарлова³,
М.Т. Аршидинова³, К.Б. Бегалиева³, А.К. Кудайкулов³, А.А. Ташев³

¹Kazakh agrarian-technical University named S.Seifullin, Astana, Kazakhstan;

²Институт механики и машиноведения имени академика У.А.Джолдасбекова;

³Институт информационных и вычислительных технологий КН МОН РК

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О УСТАНОВИВШЕГОСЯ ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ СТЕРЖНЯ ОГРАНИЧЕННОЙ ДЛИНЫ ПРИ ОДНОВРЕМЕННОМ НАЛИЧИИ КОНЦЕВЫХ ТЕМПЕРАТУР И БОКОВЫХ ТЕПЛООБМЕНА

Аннотация. В данной статье рассматриваются проблемы численного изучения термомеханического состояния стержней. На основе фундаментального закона об изменении количества тепла, прошедшее за время dt через фиксированного сечения строится уравнение установившегося теплопроводности для горизонтального стержня ограниченной длины и постоянного поперечного сечения.

При этом на двух концах исследуемого стержня заданы разные температуры, а через боковой поверхности происходит теплообмен с окружающей ее средой. Кроме того, исследуемый стержень выполнен из термозащитного материала ANV-300. Определяющийся закон распределения температуры, всех соответствующих деформации и напряжений а также перемещения по длине исследуемого стержня. Вычисляются величины термического удлинения и возникающего осевого усилия.

В сложной термической зоне работают подшипниковые компоненты реактивных и водородных двигателей, атомных и тепловых электростанций, технологических линий перерабатывающих производств, а также двигателей внутреннего сгорания. Надежная работа этих конструкций будет зависеть от условий термоэда компонентов подшипника. Поэтому это исследование посвящено численному изучению состояния термоэда несущих компонентов конструкций в виде стержней ограниченной длины, ограниченных с обоих концов.

Предлагаемый вычислительный алгоритм основан на принципе сохранения энергии. При этом все типы интегралов в функциональных формулах энергии интегрируются аналитически. При этом полученные численные решения будут иметь высокую точность.

Ключевые слова: тепловой поток, теплообмен, теплопроводности, теплообмена, теплоизоляция.

Information about authors:

Askarova A. - PhD doctoral student of the 2nd academic year for the specialty of Mathematical and computer modeling (6D070500), Institute of Information and Computational Technologies, e-mail: 91-ashok@mail.ru.

Arshidinova M.T. - PhD doctoral student of the 1st academic year for the specialty of Computing Systems and Software Engineering (6D070400), Institute of Information and Computational Technologies, e-mail: mukaddas_arshidi@mail.ru.

Begaliyeva K.B. - PhD doctoral student of the 1st academic year for the specialty of Automation and control (6D070200), Institute of Information and Computational Technologies, e-mail: kalamkas_b@mail.ru.

Kudaykulov A.K. - Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Institute of Information and Computational Technologies, e-mail: kudaykulov2006@mail.ru.

Tashev A.A. - Doctor of Technical Sciences, Institute of Information and Computational Technologies, e-mail: azattash@mail.ru

Zhumakhanova Anar Sydykovna - senior lecturer of "Information Systems", Kazakh agrarian-technical University named after S.Seifullin, Astana, Kazakhstan, e-mail: guldana2002@mail.ru.

Nogaybaeva Makpal Orzabayevna - PhD doctoral student of the 1st academic year, Institute of Mechanics and Mechanical Engineering, e-mail: zhuldyz_tm@mail.ru.

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 1, Number 317 (2018), 34 – 50

UDC 517.956.32

M.I. Akylbayev¹, A. Beysebayeva², A. Sh. Shaldanbayev²

¹ Regional Social-Innovational University, Shymkent;

² M. Auezov South Kazakhstan State University, Shymkent.
musabek_kz@mail.ru akbope_a@mail.ru shaldanbaev51@mail.ru

**ON THE PERIODIC SOLUTION OF THE GOURSAT PROBLEM
FOR A WAVE EQUATION OF A SPECIAL
FORM WITH VARIABLE COEFFICIENTS**

Abstract. In this work the task of Goursat in a characteristic quadrangle for a wave equation of an express view with variable coefficients is solved. The spectral impression of the decision not traditional for such Voltaire tasks is gained. For this purpose as a vvvspomogoalny task the spectral task for the equation is used with we otklonyashchitsya by an argument. It is shown that the oprator of a type of $Su(x)=u(1-x)$ plays a role of the operator Schmidt встречающиеся in decomposition of Voltaire operators.

Keywords: Volterra operators, indefinite metric, Goursat problem, similarity operators, spectrum, spectral decomposition, Fourier method, orthogonal basis, the Hulbert-Schmidt theorem.

1. Introduction. The investigations of the Dirichlet problem for the string vibration equation in a bounded region go back to J. Hadamard (Filler) who first noted the uniqueness of the solution in the rectangle. D. Burgin and Duffin [2] considered the Dirichlet problem for the equation $u_{xx} = u_{tt}$ in the rectangle $\{0 < x < X; 0 < t < T\}$. It is shown that the un uniqueness of a solution in a certain space appears if and only if X / T is rational. The existence theorems for a solution in classical spaces are established, and the smoothness of the solution is as greater as the smoothness is larger of the boundary function and as worse the number X / T is approximated to the rational numbers. Also the Neumann problem considered. Later these results were refined and generalized by various authors (see, for example, [3], [4], [5], [6]). Sobolev [7] constructed an example of a well-posed boundary value problem in a rectangle for a hyperbolic system of equations, Yu.M. Berezanskii [8] constructed a class of regions with angles, a change in the domain inside which leads to a continuous changing of solution of the Dirichlet problem. For regions with a smooth boundary in smooth spaces, only the question of the uniqueness of solution of the Dirichlet problem was studied (see, for example, the work of RA Aleksandryan [9]). In work [3], Arnol'd, applying his results on the maps of the circle into itself, refines the results of [2], indicating that the proof of theorems on the existence of classical solutions of the Dirichlet problem can be carried over to the case of an ellipse. Row of investigations T.Sh. Kalmenov and M.A. Sadybekov's are also devoted to boundary value problems of hyperbolic equations [10] - [12], the results of these researches are summarized in the monograph [13].

In [14], using the new general method, the properties of solutions of the Cauchy problem, are researched as well as of the first, second and third boundary value problems in the disk for a second-order

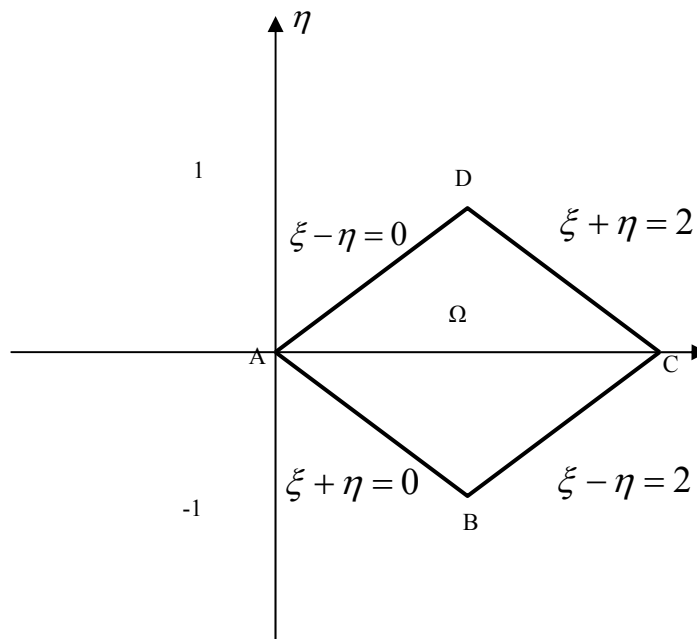
hyperbolic equation with constant coefficients are investigated. The application of this method to higher-order equations can be found in [15]. A new and relatively simple method for constructing a system of polynomial solutions of the Dirichlet problem for second-order hyperbolic equations with constant coefficients in the disk is proposed in [16], and it is also proposed to construct a complete set of eigenfunctions for the Dirichlet problem for the string oscillation equation. The eigenfunctions constructed in this paper coincide with the eigenfunctions constructed earlier by RA Aleksandaryan [9].

The analysis of the contents of these studies has shown that the spectral properties of these boundary-value problems depend on the geometry of the region, in particular, on the group of motion of the region. A non-equilateral triangle does not have a symmetry group, so we abandoned the characteristic triangle and began to consider boundary value problems inside the characteristic quadrangle. In this case, equations with deviating arguments appear naturally, which deserve a separate investigation [17] - [24].

1. Let- Ω be the characteristic quadrangle of the wave equation,

$$u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} + q\left(\frac{\xi-\eta}{2}\right)(u_{\xi} + u_{\eta}) + p\left(\frac{\xi+\eta}{2}\right)(u_{\xi} - u_{\eta}) + p\left(\frac{\xi+\eta}{2}\right)q\left(\frac{\xi-\eta}{2}\right)u = f(\xi, \eta) \quad (1)$$

with the sides $AB: \xi + \eta = 0, BC: \xi - \eta = 2, CD: \xi + \eta = 2, DA: \xi - \eta = 0$ (see Pic.1).



Pic. 1

Suppose that the right-hand side of equation (1) is a periodic function with some periods. The question is whether equation (1) can have a periodic solution for the corresponding behavior of the coefficients. It is known that a periodic problem is poorly posed for the wave equation because of the presence of an infinite eigenvalue at the point $\lambda = 0$. Therefore, we consider the Goursat problem for equation (1) and study the possibilities of periodic continuability of the solution of this problem to the whole (ξ, η) plane.

Formulation of the problem. Find the periodic solution of the Goursat problem for the wave equation

$$\begin{cases} u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} + q\left(\frac{\xi - \eta}{2}\right)(u_{\xi} + u_{\eta}) + \rho\left(\frac{\xi + \eta}{2}\right)(u_{\xi} - u_{\eta}) + \rho\left(\frac{\xi + \eta}{2}\right)q\left(\frac{\xi - \eta}{2}\right)u = f(\xi, \eta) & (1) \\ u|_{AB} = 0, u|_{BC} = 0 & (2) \end{cases}$$

To solve this problem, we make a variables of change. Assuming,

$$x = \frac{\xi + \eta}{2}, y = \frac{\xi - \eta}{2}, \text{ we have}$$

$$\xi = x + y, \eta = x - y; u(\xi, \eta) = u(x + y, x - y) = \hat{u}(x, y);$$

$$u_{\xi} = \hat{u}_x \cdot x_{\xi} + \hat{u}_y \cdot y_{\xi} = \hat{u}_x \cdot \frac{1}{2} + \hat{u}_y \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(\hat{u}_x, \hat{u}_y);$$

$$\begin{aligned} u_{\xi\xi} &= \frac{1}{2}[\hat{u}_{xx} \cdot x_{\xi} + \hat{u}_{xy} \cdot y_{\xi} + \hat{u}_{yx} \cdot x_{\xi} + \hat{u}_{yy} \cdot y_{\xi}] = \frac{1}{2}\left[\hat{u}_{xx} \cdot \frac{1}{2} + \hat{u}_{xy} \cdot \frac{1}{2} + \hat{u}_{yx} \cdot \frac{1}{2} + \hat{u}_{yy} \cdot \frac{1}{2}\right] = \\ &= \frac{1}{4}[\hat{u}_{xx} + 2\hat{u}_{xy} + \hat{u}_{yy}]; \end{aligned}$$

$$u_{\eta} = \hat{u}_x \cdot x_{\eta} + \hat{u}_y \cdot y_{\eta} = \hat{u}_x \cdot \frac{1}{2} - \hat{u}_y \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(\hat{u}_x, \hat{u}_y);$$

$$\begin{aligned} u_{\eta\eta} &= \frac{1}{2}[\hat{u}_{xx} \cdot x_{\eta} + \hat{u}_{xy} \cdot y_{\eta} - \hat{u}_{yx} \cdot x_{\eta} - \hat{u}_{yy} \cdot y_{\eta}] = \frac{1}{2}\left[\hat{u}_{xx} \cdot \frac{1}{2} - \hat{u}_{xy} \cdot \frac{1}{2} - \hat{u}_{yx} \cdot \frac{1}{2} + \hat{u}_{yy} \cdot \frac{1}{2}\right] = \\ &= \frac{1}{4}[\hat{u}_{xx} - 2\hat{u}_{xy} + \hat{u}_{yy}]; \end{aligned}$$

$$u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} = \hat{u}_{xy}.$$

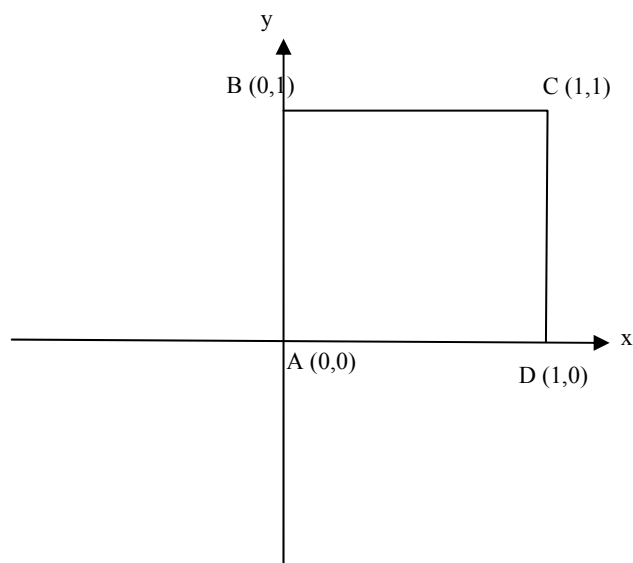
After the replacement, equation (1) takes the form

$$\hat{u}_{xy} + \hat{q}(y)\hat{u}_x + \hat{p}(x)\hat{u}_y + \hat{p}(x)\hat{q}(y)\hat{u}(x, y) = \hat{f}(x, y).$$

After releasing the caps after the transformation, we get

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} + p(x)\right] \cdot \left[\frac{\partial}{\partial y} + q(x)\right] \cdot u(x, y) = f(x, y).$$

This is a wave equation of a special form. Now let us consider the boundary conditions, and the region of variation of the new variables x, y . The mapping $x = \frac{\xi + \eta}{2}, y = \frac{\xi - \eta}{2}$ maps the domain Ω to the domain D (see Pic.2).



Pic.2

Consequently, our original problem takes the following form

$$\begin{cases} \left[\frac{\partial}{\partial x} + p(x) \right] \cdot \left[\frac{\partial}{\partial y} + q(x) \right] \cdot u(x, y) = f(x, y), (x, y) \in D & (3) \\ u|_{x=0} = 0, u|_{y=1} = 0. & (4) \end{cases}$$

The aim of this paper is to solve the Goursat problem (3) - (4) using the methods of the spectral theory of differential equations with deviating arguments [17-24], and the proof of the periodicity of the obtained solution.

2. The researching methods

First we study the corresponding spectral problem:

$$\begin{cases} y'(x) + q(x)y(x) = \lambda \cdot y(1-x), x \in (0,1), & (5) \\ y(0) = 0. & (6) \end{cases}$$

where $q(x)$ – is a continuous function.

Question: under what conditions on $q(x)$ the operator of problem (5) - (6) is similar to the operator of problem

$$\begin{cases} y'(x) = \lambda \cdot y(1-x), x \in (0,1), & (5') \\ y(0) = 0. & (6') \end{cases}$$

Lemma 2.1. If $H=L_2(0,1)$ and

$$q(x) + q(1-x) = 0,$$

then the operators

$$A = \frac{d}{dx}, D(A) = \{y(x) \in W_2^1, y(0) = 0\}$$

$$B = \frac{d}{dx} + q(x), D(B) = \{z(x) \in W_2^1, z(0) = 0\}$$

are similar to each other.

Proof. We seek the transformation operator in the form

$$z(x) = Ty(x) = e^{\int_0^x q(t)dt} \cdot y(x).$$

Then we have $z(0) = e^0 \cdot y(0) = 0$ for $y(x) \in D(A)$. Hence the operator T takes the domain of the operator A to the domain of the operator, that is, $T: D(A) \rightarrow D(B)$.

Further,

$$z'(x) = y'(x) \cdot e^{\int_0^x q(t)dt} + q(x) \cdot y(x) \cdot e^{\int_0^x q(t)dt} = T[y'(x) + q(x) \cdot y(x)] = TBy(x).$$

Consequently

$$Az = z'(x) = TBy(x) \Rightarrow ATy(x) = TBy(x), \forall y(x) \in D(B), T^{-1}AT = B,$$

it was required to prove.

Lemma 2.2. If $H=L_2(0,1)$, and

- (1) $q(x) + q(1-x) = 0$;
- (2) $Sy(x) = y(1-x), \forall y(x) \in L_2(0,1)$,

then the operators SA and SB are similar to each other, where

$$A = \frac{d}{dx}, D(A) = \{y(x) \in W_2^1, y(0) = 0\}$$

$$B = \frac{d}{dx} + q(x), D(B) = \{z(x) \in W_2^1, z(0) = 0\}$$

Proof. Let

$$Ty(x) = e^{\int_0^x q(t)dt} \cdot y(x),$$

then, by Lemma 1, we have $AT = TB, \forall y(x) \in D(B)$. Acting using the operator S on this equality we obtain

$$SAT = STB.$$

To prove the lemma it suffices that the operators S and T commute. Let us verify that when the condition, $q(x) + q(1-x) = 0$, is satisfied, the operators S and T commute.

$$STy(x) = Se^{\int_0^x q(t)dt} \cdot y(x) = e^{\int_0^x q(t)dt} \cdot y(1-x),$$

$$TSy(x) = Ty(1-x) = e^{\int_0^x q(t)dt} \cdot y(1-x),$$

$$\text{If } STy(x) = TSy(x), \text{ to } e^{\int_0^x q(t)dt} = e^{\int_0^{1-x} q(t)dt}, \int_0^x q(t)dt - \int_0^{1-x} q(t)dt = 0.$$

Differentiating the last equation, we obtain

$$q(x) + q(1-x) = 0.$$

The previous equality follows from the last equality. In fact, if

$$q(x) + q(1 - x) = 0,$$

$$\int_0^x q(t)dt - \int_0^x q(1 - t)dt = 0, \quad (7)$$

$$\int_0^x q(1 - t)dt = \left| \begin{matrix} t = 1 - \xi \\ dt = -d\xi \end{matrix} \right| = - \int_0^{1-x} q(\xi)d\xi = \int_{1-x}^1 q(\xi)d\xi = \int_0^1 q(t)dt - \int_0^{1-x} q(t)dt; \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 q(t)dt &= \left| \begin{matrix} t = 1 - \xi \\ dt = -d\xi \end{matrix} \right| = - \int_1^0 q(1 - \xi)d\xi = \int_0^1 q(1 - \xi)d\xi = |q(1 - \xi) = -q(\xi)| = \\ &= \int_0^1 q(\xi)d\xi = - \int_0^1 q(t)dt, \Rightarrow \int_0^1 q(t)dt = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

It is obvious that (9), (8), and (7) imply the equality

$$\int_0^x q(t)dt - \int_0^{1-x} q(t)dt = 0.$$

From the last equality implies the equality $ST = TS$. The lemma is proved.

Lemma 2.3. Let

$$H = L_2(0, 1),$$

$$q(x) + q(1 - x) = 0,$$

and

$$\begin{aligned} A &= \frac{d}{dx}, D(A) = \{y(x) \in W_2^1, y(0) = 0\} \\ B &= \frac{d}{dx} + q(x), D(B) = \{z(x) \in W_2^1, z(0) = 0\} \end{aligned}$$

Then the spectra of the operators SA and SB coincide.

Proof. By Lemma 2, we have the equality

$$SAT = STB, \Rightarrow SA = TSBT^{-1},$$

where

$$Ty(x) = e^{\int_0^x q(t)dt} \cdot y(x).$$

Then

$$SA - \lambda I = T(SB - \lambda I)^{-1} \Rightarrow (SA - \lambda I)^{-1} = T(SB - \lambda I)^{-1}T^{-1}.$$

Consequently, the resolvent sets of the operators SA and SB coincide, so their spectra also coincide.

Now we investigate the spectrum of the operator SA , in view of their importance for applications, we give detailed calculations.

Lemma 2.4.If

$$H=L_2(0, 1), Sy(x)=y(1-x),$$

$$A = \frac{d}{dx}, D(A) = \{y(x) \in W_2^1, y(0) = 0\},$$

that the operator SA has an infinite set of eigenvalues

$$\lambda_n = (-1)^n \left(n\pi + \frac{\pi}{2} \right), n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

and their corresponding eigenfunctions

$$u_n = \sqrt{2} \sin \left(n\pi + \frac{\pi}{2} \right) x, B_n = \text{const},$$

which form an orthonormal basis of the space $H=L_2(0,1)$.

Proof. Let then $Au = \mu Su$, therefore, we are dealing with a generalized spectral problem:

$$\begin{cases} u'(x) = \mu \cdot u(1-x), \\ u(0) = 0. \end{cases} \quad (10)$$

Differentiating equations (10), we obtain

$$u''(x) = -\mu \cdot u'(1-x) = \mu \cdot \mu \cdot u(x) = -\mu^2 \cdot u(x), \Rightarrow$$

$$\begin{cases} u''(x) = \mu^2 \cdot u(x), \end{cases} \quad (11)$$

$$\begin{cases} u(0) = 0, u'(1) = 0. \end{cases} \quad (12)$$

The general solution of equation (11) has the form

$$u(x) = A \cos \mu x + B \sin \mu x, A, B - \text{const} \quad (13)$$

Substituting (13) into the boundary conditions (12), we obtain

$$u(0) = A = 0, u'(1) = [-\mu A \sin \mu x + \mu B \cos \mu x]_{x=1} = \mu \cdot B \cos \mu = 0.$$

Since, $B \neq 0$, then the eigenvalues of problem (11) + (12) are found from equation

$$\Delta(\mu) = \mu \cos \mu x = 0, \quad (14)$$

The trivial solution $u(x) \equiv 0$ corresponds to the value $\mu = 0$, therefore it is not an eigenvalue. From the equation, $\cos \mu = 0$, we find the eigenvalues of problem (11) + (12).

$$\mu_n = n\pi + \frac{\pi}{2}, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (15)$$

The square of each eigenvalue of problem (10) is an eigenvalue of the Sturm-Liouville problem (11) - (12), and the corresponding eigenfunctions coincide. But problem (11) - (12) can have other eigenvalues and corresponding eigenfunctions, so it is expedient to directly verify the eigenfunctions obtained. Substituting the eigenfunctions, $u_n(x) = B_n \sin \mu_n x$, $B_n - \text{const}$ into equation (10), we have

$$u'_n(x) = \mu_n B_n \cos \mu_n x,$$

$$u_n(1-x) = B_n \cdot \sin \mu_n (1-x) = B_n \cdot \sin(\mu_n - \mu_n x) =$$

$$= B_n \cdot \sin \mu_n \cdot \cos \mu_n x - \cos \mu_n \cdot \sin \mu_n x = B_n \cdot \sin \left(n\pi + \frac{\pi}{2} \right) x \cdot \cos \mu_n x = B_n \cdot \cos n\pi \cdot \cos \mu_n x = \\ = (-1)^n B_n \cdot \cos \mu_n x.$$

Consequently,

$$u'_n(x) = (-1)^n \mu_n u_n(1-x),$$

Where

$$\mu_n = n\pi + \frac{\pi}{2}, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Let us show the completeness of the system of eigenfunctions obtained. Suppose that for some, $f(x) \in L_2(0, 1)$, the equalities

$$\int_0^1 f(x) u_n(x) dx = 0, n = 1, 2, \dots$$

are exist. Then

$$\int_0^1 f(x) \sin \left(n\pi + \frac{\pi}{2} \right) x dx = 0, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \\ \int_0^1 f(x) \sin \left(-n\pi + \frac{\pi}{2} \right) x dx = 0, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Adding these two equalities, we have

$$\int_0^1 f(x) \cos \frac{\pi x}{2} \sin \pi x dx = 0, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Hence, in view of the completeness of the system of functions $\{\sin n\pi x\}$ in the space $L_2(0, 1)$, we obtain $f(x) \cos \frac{\pi x}{2} = 0$ almost everywhere, hence $f(x) = 0$ almost everywhere.

The orthogonality of the resulting system is verified by direct calculation

$$\int_0^1 \sin \left(n\pi + \frac{\pi}{2} \right) x \cdot \sin \left(m\pi + \frac{\pi}{2} \right) x dx = \\ = \frac{1}{2} \int_0^1 [\cos(n-m)\pi x - \cos(n+m+1)\pi x] dx = \\ = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(n-m)\pi x}{(n-m)\pi} - \frac{\sin(n+m+1)\pi x}{(n+m+1)\pi} \right]_0^1 = 0, \text{ при } n \neq m.$$

Calculating the norm of the eigenfunctions, we have

$$\|u_n\|^2 = 2 \cdot \int_0^1 \sin^2 \left(n\pi + \frac{\pi}{2} \right) x dx = \int_0^1 [1 - \cos(2n\pi + \pi)x] dx = 1.$$

Lemma 2.4 is proved.

Now we are able to prove the following theorem.

Theorem 2.1. If $H = L_2(0, 1)$ and $q(x)$ is a continuous real function satisfying the condition,

$$q(x) + q(1 - x) = 0,$$

then the eigenfunctions of the boundary value problem

$$\begin{cases} y'(x) + q(x)y(x) = \lambda y(1 - x), \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad (14)$$

form a Riesz basis in $L_2(0, 1)$.

Proof. Let $u_n(x)$ be the eigenfunctions of the boundary-value problem (10), then the functions

$$y_n(x) = e^{-\int_0^x q(t)dt} \cdot u_n(x)$$

will be the eigenfunctions of problem (14). In fact,

$$\begin{aligned} y_n'(x) &= u_n'(x)e^{-\int_0^x q(t)dt} - q(x)u_n(x)e^{-\int_0^x q(t)dt}, \Rightarrow \\ y_n'(x) + y_n(x)q(x) &= u_n'(x)e^{-\int_0^x q(t)dt}. \end{aligned}$$

Operating the operator $Sy(x) = y(1 - x)$ by this equality, and taking into account the conditions of the theorem, we have

$$\begin{aligned} s[y_n'(x) + y_n(x)q(y)] &= u_n'(x)e^{-\int_0^x q(t)dt} = \mu_n u_n(x)e^{-\int_0^x q(t)dt} = \mu_n y_n(x), \Rightarrow \\ y_n'(x) + y_n(x)q(y) &= \mu_n y_n(1 - x), y_n(0) = 0. \end{aligned}$$

It remains only to note that the operator

$$Tu_n(x) = e^{-\int_0^x q(t)dt} \cdot u_n(x)$$

linear bounded, and invertible operator in the space $L_2(0,1)$. The theorem is proved.

We now proceed to the solution of the problem posed earlier, for this we first solve the spectral problem

$$\begin{cases} \left[\frac{\partial}{\partial x} + p(x) \right] \left[\frac{\partial}{\partial y} + q(y) \right] u(x, y) = \lambda u(1 - x, 1 - y) \\ u|_{x=0} = 0, u|_{y=1} = 0. \end{cases} \quad (15)$$

$$(16)$$

We seek solutions of this problem in the form

$$u(x, y) = v(x) \cdot \omega(y). \quad (17)$$

Then from the boundary condition we have

$$\begin{aligned} u|_{x=0} &= v(0) \cdot \omega(y) = 0, \Rightarrow v(0) = 0; \\ u|_{y=1} &= v(x) \cdot \omega(1) = 0, \Rightarrow \omega(1) = 0. \end{aligned}$$

Substituting (17) into equation (15), we have

$$\frac{\left[\frac{\partial}{\partial x} + p(x)\right]v(x)}{v(1-x)} \cdot \frac{\left[\frac{\partial}{\partial y} + q(y)\right]\omega(y)}{\omega(1-y)} = \lambda.$$

Dividing the variables, we obtain two spectral problems:

$$\text{I. } \begin{cases} v'(x) + p(x)v(x) = \mu v(1-x), \\ v(0) = 0. \end{cases}$$

$$\text{II. } \begin{cases} \omega'(y) + q(y)\omega(y) = \nu \omega(1-y), \\ \omega(1) = 0. \end{cases}$$

If $u(y)$ is a solution of the spectral problem

$$\begin{cases} u'(y) = \nu u(1-y), \\ u(1) = 0. \end{cases} \quad (18)$$

и $q(y) + q(1-y) = 0$, then the function

$$\omega(y) = e^{\int_y^1 q(\xi) d\xi} u(y)$$

is a solution of the spectral problem II. Indeed

$$\omega'(y) = u'(y)e^{\int_y^1 q(\xi) d\xi} - q(y)e^{\int_y^1 q(\xi) d\xi} u(y), \Rightarrow$$

$$\omega'(y) + q(y)\omega(y) = u'(y)e^{\int_y^1 q(\xi) d\xi}.$$

Let $Sy = y(1-x)$, then

$$S[\omega'(y) + q(y)\omega(y)] = e^{\int_y^1 q(\xi) d\xi} u'(1-y) = e^{\int_y^1 q(\xi) d\xi} \cdot \lambda u(1-y) = \lambda \omega(y),$$

$$\omega'(y) + q(y)\omega(y) = \lambda \omega(1-y).$$

Further, $u(1) = 0$ implies $\omega(1) = 0$, so that it remains for us to solve the problem (18)

$$\begin{cases} u'(x) = \nu u(1-x), \\ u(1) = 0. \end{cases}$$

To use the results already known, we make a change of variable, assuming

$$v(x) = u(1-x), v'(x) = -u'(1-x), -v'(1-x) = u',$$

$$\begin{cases} -v'(1-x) = \nu v(x) \\ v(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v'(1-x) = -\nu v(x), \\ v(0) = 0. \end{cases}$$

From Lemma 4 we know that

$$v_n(x) = B_n \cdot \sin\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right)x, \text{ therefore,}$$

$$\begin{aligned} v_n(x) &= v_n(1-x) = B_n \cdot \sin\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right)(1-x) = B_n \cdot \sin\left[n\pi + \frac{\pi}{2} - \left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right)x\right] = \\ &= B_n \cdot \cos\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right)x \cdot \cos n\pi = (-1)^n B_n \cdot \cos\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right)x. \end{aligned}$$

We compute the eigenvalues

$$\begin{aligned} v_n' &= B_n \left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \cos\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right)x, \\ v_n(1-x) &= B_n \cdot \sin\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right)(1-x) = (-1)^n B_n \cos\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right)x, \\ v_n' &= \left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right)(-1)^n v_n(1-x) = -\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right)(-1)^{n+1} v_n(1-x), \Rightarrow \\ v_n &= (-1)^{n+1} \left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

Thus, the solution of the spectral problem (18) is the function

$$u_n(y) = c_n \cos\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right)y,$$

but by the eigenvalues of the number: $v_n = (-1)^{n+1} \left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right)$, where c_n - are the normalization coefficients. Let us calculate these coefficients

$$\begin{aligned} \|u_n\|^2 &= |c_n|^2 \int_0^1 \cos^2\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right)y dy = \frac{|c_n|^2}{2} \int_0^1 [1 + \cos(2n\pi + \pi)y] dy = \\ &= \frac{|c_n|^2}{2} y + \frac{\sin(2n\pi + \pi)y}{2n\pi + \pi} \Big|_0^1 \frac{|c_n|^2}{2} = 1, c_n = \sqrt{2}. \end{aligned}$$

For complete certainty, we verify the orthogonality of these eigenfunctions

$$\begin{aligned} (u_n, u_m) &= 2 \int_0^1 \cos\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right)y \cdot \cos\left(m\pi + \frac{\pi}{2}\right)y dy = \\ &= \int_0^1 \left[\cos\left(n\pi + \frac{\pi}{2} + m\pi + \frac{\pi}{2}\right)y + \cos\left(n\pi + \frac{\pi}{2} - m\pi - \frac{\pi}{2}\right)y \right] dy = \\ &= \int_0^1 \{ \cos[(n+m)\pi + \pi]y + \cos(n-m)\pi y \} dy = \\ &= \left[\frac{\sin(n+m+1)y}{n+m+1} + \frac{\sin(n-m)\pi y}{n-m} \right] \Big|_0^1 = 0, \text{ при } n \neq m. \end{aligned}$$

We have proved the following Lemma 2.5.

Lemma 2.5. The eigenfunctions of the spectral problem

$$\begin{cases} \omega'(y) + q(y)\omega(y) = \nu\omega(1-y), y \in (0,1) \\ \omega(1) = 0, \end{cases}$$

$$q(y) + q(1 - y) = 0$$

is a function

$$\omega(y) = 2e^{\int_y^1 q(\xi) d\xi} \cdot \cos\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right)y, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

and eigenvalues are

$$v_n = (-1)^{n+1} \cdot \left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right), n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Theorem 2.2. If $H = L_2(0, 1)$ and $q(x)$ -continuous real function, satisfying condition.

$$q(x) + q(1 - x) = 0,$$

then the eigenfunctions of a boundary value problems

$$\begin{cases} y'(x) + q(x)y = \nu y(1 - x), \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

form a Riesz basis of the space $L_2(0, 1)$.

The proof of the theorem follows in an obvious way from Lemma 2.5. We summarize the results of the lemmas obtained [2.1-2.5], in the form of the following theorem,

Theorem 2.3. If

$$H = L_2(0, 1) \text{ и}$$

$$p(x) + p(1 - x) = 0,$$

$$q(y) + q(1 - y) = 0$$

then the spectral problem

$$\begin{cases} \left[\frac{\partial}{\partial x} + p(x)\right] \left[\frac{\partial}{\partial y} + q(y)\right] u(x, y) = \lambda u(1 - x, 1 - y) \\ u|_{x=0} = 0, u|_{y=1} = 0 \end{cases}$$

has an infinite set of eigenvalues:

$$\lambda_{nm} = \pi^2 (-1)^{n+m+1} \left(n + \frac{1}{2}\right) \left(m + \frac{1}{2}\right), n, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

and the corresponding eigenfunctions:

$$u_{nm}(x, y) = 2e^{\int_y^1 q(t) dt - \int_0^x p(t) dt} \cdot \sin\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right)x \cdot \cos\left(m\pi + \frac{\pi}{2}\right)y,$$

which form a Riesz basis of $L_2(D)$.

3. Results of the study Now we return to the original problem (3) + (4). Working Operator $S: Su(x, y) = u(1 - x, 1 - y)$ on equation (3), we obtain

$$S \left[\frac{\partial}{\partial x} + p(x)\right] \left[\frac{\partial}{\partial y} + q(y)\right] u(x, y) = Sf(x, y) = f(1 - x, 1 - y). \quad (19)$$

Expanding the function $u(x, y)$, and $f(1 - x, 1 - y)$ in the eigenfunctions of the spectral problem (15) + (16), we have

$$f(1 - x, 1 - y) = \sum_{n,m=-\infty}^{+\infty} f_{nm} u_{nm}(x, y),$$

$$u(x, y) = \sum_{n,m=-\infty}^{+\infty} a_{nm} u_{nm}(x, y). \quad (20)$$

where f_{nm}, a_{nm} - are the corresponding Fourier coefficients. Substituting (20) into (19), we obtain

$$\sum_{n,m=-\infty}^{+\infty} \lambda_{nm} a_{nm} u_{nm}(x, y) = \sum_{n,m=-\infty}^{+\infty} f_{nm} u_{nm}(x, y), \Rightarrow$$

$$a_{nm} = \frac{f_{nm}}{\lambda_{nm}}.$$

Consequently,

$$u(x, y) = \sum_{n,m=-\infty}^{+\infty} \frac{f_{nm}}{\lambda_{nm}} u_{nm}(x, y).$$

Theorem 3.1. If $H = L_2(0, 1)$ and

$$(a) p(x) + p(1 - x) = 0, (b) q(y) + q(1 - x) = 0,$$

then the Goursat problem

$$\begin{cases} \left[\frac{\partial}{\partial x} + p(x) \right] \left[\frac{\partial}{\partial y} + q(y) \right] u(x, y) = f(x, y), (x, y) \in D \\ u|_{x=0} = 0, u|_{y=1} = 0 \end{cases}$$

is strongly solvable in the space $L_{2,\rho}(D)$ with weight, and for the solution $u(x, y)$ we have the representation

$$u(x, y) = \sum_{n,m=-\infty}^{+\infty} \frac{f_{nm}}{\lambda_{nm}} u_{nm}(x, y),$$

$$u_{nm}(x, y) = 2 \exp \left[\int_y^1 q(t) dt - \int_0^x p(t) dt \right] \cdot \sin \left(n\pi + \frac{\pi}{2} \right) x \cdot \cos \left(m\pi + \frac{\pi}{2} \right) y,$$

$$\lambda_{nm} = \pi^2 (-1)^{n+m+1} \left(n + \frac{1}{2} \right) \left(m + \frac{1}{2} \right), n, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

where f_{nm} -are the Fourier coefficients of the function $f(1 - x, 1 - y)$ in the system $\{u_{nm}\}$. The scalar product in the space $L_{2,\rho}(D)$ has the form

$$(f, g) = \int_0^1 \int_0^1 \exp \left[\int_y^1 q(t) dt - \int_0^x p(t) dt \right] f(x, y) g(x, y) dx dy.$$

Many people know the following lemma; nevertheless, for the sake of completeness, we give its proof.

Lemma 3.1.

Let $q(x)$ be a periodic function with period 1, that is, $q(x + 1) = q(x)$. Then in order for the function

$$Q(x) = \int_0^x q(t) dt$$

was a periodic function with a period equal to 1-c is necessary and sufficient that

$$\int_0^1 q(t) dt = 0.$$

Proof.

(a) Necessity. Let $Q(x)$ be a periodic function with period equal to one; $Q(x) = Q(1 + x)$. Then

$$\begin{aligned} \int_0^x q(t) dt &= \int_0^{1+x} q(t) dt = \int_0^1 q(t) dt + \int_1^{1+x} q(t) dt; \\ \int_1^{1+x} q(t) dt &= \left| \begin{array}{l} t = 1 + \xi \\ dt = d\xi \end{array} \right| = \int_0^x q(1 + \xi) d\xi = \int_0^x q(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Следовательно

$$\int_0^x q(t) dt = \int_0^1 q(t) dt + \int_0^x q(\xi) d\xi.$$

Hence it is obvious that $\int_0^1 q(t) dt = 0$.

(b) The sufficiency. Assume that the following equalities hold: $q(x) = q(x + 1)$, $\int_0^1 q(t) dt = 0$. Then

$$\begin{aligned} Q(1 + x) &= \int_0^{1+x} q(t) dt = \int_0^1 q(t) dt + \int_1^{1+x} q(t) dt = \\ &= \int_1^{1+x} q(t) dt = \left| \begin{array}{l} t = 1 + \xi \\ dt = d\xi \end{array} \right| = \int_0^x q(1 + \xi) d\xi = \int_0^x q(\xi) d\xi = Q(x). \end{aligned}$$

and it was required to prove.

Corollary 3.1. If $p(x)$ and $q(y)$ are real continuous functions satisfying the following conditions:

$$p(x) + p(1 - x) = 0, q(y) + q(1 - y) = 0,$$

functions

$$P(x) = \int_0^x p(t) dt, Q(y) = \int_y^1 q(t) dt$$

are periodic with periods equal to one.

Proof. Lets show that if condition (1) is satisfied, we have

$$\int_0^1 p(t)dt = 0.$$

From condition (1), we have

$$\int_0^1 p(t)dt + \int_0^1 p(1-t)dt = 0; \int_0^1 p(1-t)dt = \left| \begin{matrix} \xi = 1-t \\ d\xi = -dt \\ t = 1-\xi \end{matrix} \right| = - \int_1^0 p(\xi)d\xi = \int_0^1 p(\xi)d\xi,$$

Consequently,

$$2 \int_0^1 p(t)dt = 0 \Rightarrow \int_0^1 p(t)dt = 0.$$

Further,

$$Q(y) = \int_0^1 q(t)dt + \int_0^y q(t)dt = - \int_0^y q(t)dt.$$

Corollary 3.2. The eigenfunctions of the spectral problem (15) + (16) are periodic with period $T = 2$.

Proof.

$$\begin{aligned} u_{nm}(x, y) &= 2 \exp \left[\int_y^1 q(t)dt - \int_0^x p(t)dt \right] \cdot \sin \left(n\pi + \frac{\pi}{2} \right) x \cdot \cos \left(m\pi + \frac{\pi}{2} \right) y, \\ u_{nm}(x + 2, y + 2) &= 2 \exp \left[\int_y^1 q(t)dt - \int_0^x p(t)dt \right] \cdot \sin \left[2n\pi + \pi + \left(n\pi + \frac{\pi}{2} \right) x \right] \cdot \\ &\quad \cos \left[2m\pi + \pi + \left(m\pi + \frac{\pi}{2} \right) y \right] = \\ &= 2 \exp \left[\int_y^1 q(t)dt - \int_0^x p(t)dt \right] \cdot \sin \left(n\pi + \frac{\pi}{2} \right) x \cdot \cos \left(m\pi + \frac{\pi}{2} \right) y = u_{nm}(x, y). \end{aligned}$$

We now state the resulting final theorem.

Theorem 3.2. Let, $H = L_2(D)$, and $p(x), q(y), f(x, y)$ be real continuous functions. If the following conditions are true:

- (a) $p(x) + p(1-x) = 0$,
- (b) $q(y) + q(1-x) = 0$,
- (c) $f(x, y) \in C_0(D)$;

then the Goursat problem

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial}{\partial x} + p(x) \right] \left[\frac{\partial}{\partial y} + q(y) \right] u(x, y) &= f(x, y), (x, y) \in D \\ u|_{x=0} &= 0, u|_{y=1} = 0 \end{aligned}$$

has a unique periodic solution, with a period $T = 2$.

4. Discussion. The incorrectness of the Dirichlet problem of the wave equation $u_{xx} - u_{yy} = 0$ in region D [see Pic.2] is well known, from the operator's point of view the wave operator has a continuous spectrum, that is, zero is an infinite eigen value, the periodic problem has an analogous property, so we have a periodic problem turned their attention to Goursat's problem.

5. Conclusions. Wave equations describe wave processes: propagation of sound, electromagnetic waves, waves on water, radio waves, etc. There are cases when waves of small amplitude form giant waves. This phenomenon is due to the duration of the wave propagation process, therefore the problem of stabilizing the solutions of the wave equation as $t \rightarrow +\infty$ is of great practical importance. One of the signs of wave stabilization is their periodicity. We have established that if the external perturbation is localized, i.e. is finite, and the coefficients of the wave equation are periodic and odd, then the solution of the Goursat problem admits a periodic extension to the whole plane of independent variables.

REFERENCES

- [1] Hadamard J. On some topics connected with linear partial differential equations, Proc. Benares Math. Soc, **1921**, 3, p. 39-48.
- [2] Burgin D, Duffin R. The Dirichlet problem for the vibrating string equation, Bull. Amer. Math. Soc, **1939**, iv, 45, p. 851-858.
- [3] Арнольд В. И. Малые знаменатели, I. Изв. АН СССР. Сер. матем., **1961**, т. 25, № 1, с. 21-86.
- [4] Бобик О.И., Бондарчук П.И., Пташник Б. И. Элементы качественной теории дифференциальных уравнений в частных производных. Киев, **1972**. 175с.
- [5] Sleeman B. D. Boundary value problems for the vibrating string equation.- Proc. Roy. Soc. Edinburgh, **1981**, v. A-88, Us. 1-2, p. 185-194.
- [6] Мосолов П. П. О задаче Дирихле для уравнений в частных производных. Известия высших учебных заведений, **1960** Математика № 3 (16), с. 213-218.
- [7] Соболев С.Л. Пример корректной краевой задачи для уравнения колебания струны с данными на всей границе, ДАН-СССР, **1956**, т. 109, JM» 4, с. 707-709.
- [8] Березанский Ю. М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. Киев, **1965**. 800 с.
- [9] Александрян Р. А. Спектральные свойства операторов, порожденных системами дифференциальных уравнений типа С Л. Соболева. -Тр. Моск. матем. о-ва, **1960**, т. 9, с. 455-505.
- [10] Кальменов Т.Ш. О регулярных краевых задачах для волнового уравнения, Диффенц. уравнения. **1981**, т. 17, №6, с. 1105-1121.
- [11] Кальменов Т.Ш. О спектре одной самосопряженной задачи для волнового уравнения, Весник АН Каз ССР, **1982**, №2, с. 63-66.
- [12] Садыбеков М.И, Кальменов Т.Ш. О задаче Дирихле и нелокальных краевых задачах для волнового уравнения, Диффенц. уравнения, **1990**, т. 26, №1, с. 60-65.
- [13] Кальменов Т. Ш. Краевые задачи для линейных уравнений в частных производных гиперболического типа, Шымкент: Ғылым, **1993**, 327 с.
- [14] Бурский В. П. Краевые задачи для гиперболического уравнения второго порядка в круге, Известия. вузов. Матем., **1987**, номер 2, 22-29.
- [15] Бурский В.П. О ядре дифференциального оператора с постоянными коэффициентами младшего порядка в круге, ВИНТИ, № 3792-82 Деп., **1982**.
- [16] Саргсян Г.А. О полиномиальных решениях задачи Дирихле для гиперболических уравнений с постоянными коэффициентами в круге, Доклады национальной академии наук Армении, Том 112, **2012**, № 4.
- [17] Кальменов Т.Ш., Ахметова С.Т, Шалданбаев А.Ш. К спектральной теории уравнений с отклоняющимся аргументом // Математический журнал, Алматы. **2004**. Т. 4, № 3. С. 41-48.
- [18] Ибраймулов А.М. О спектральных свойствах краевой задачи для уравнения с отклоняющимся аргументом // Известия АН.Каз.ССР, сер.физ.-мат. **1988**. № 3. С. 22-25.
- [19] Kal'menov T. Sh., and Shaldanbaev A. Sh., On a criterion of solvability of the inverse problem of heat conduction, Journal of Inverse and Ill-Posed Problems 18, 352-369 (**2010**).
- [20] Orazov I, A. Shaldanbayev, and M. Shomanbayeva, About the Nature of the Spectrum of the Periodic Problem for the Heat Equation with a Deviating Argument, Abstract and Applied Analysis, Volume 2013 (**2013**), Article ID 128363, 6 pages, <http://dx.doi.org/10.1155/2013/128363>.
- [21] Шалданбаев А.Ш. Спектральные разложения корректных-некорректных начально краевых задач для некоторых классов дифференциальных уравнений. Монография. 193с, LAP LAMBERT Academic Publishing. <http://dnb.d-nb.de>. Email: info@lap-publishing.com, Saarbrücken **2011**, Germanu.
- [22] Allaberen Ashyralyev, Abdizhahan M. Sarsenbi, Well-posedness of an Elliptic Equation with Involution, Electronic Journal of Differential Equations, Vol. **2015** (2015), No. 284, pp. 1-8. ISSN: 1072-6691. URL: <http://ejde.math.txstate.edu> or <http://ejde.math.unt.edu> or <http://ejde.math.txstate.edu>.
- [23] Садыбеков М.А., Сарсенби А.М. Решение основных спектральных вопросов всех краевых задач для одного дифференциального уравнения первого порядка с отклоняющимся аргументом, Uzbek Mathematical Journal, **2007**, №3, pp.1-6.
- [24] Sadybekov, M. A.; Sarsenbi, A. M.; Mixed problem for a differential equation with involution under boundary conditions of general form. AIP Conference Proceedings. Ed. Ashyralyev and A. Lukashov, A. Vol. 1470, 225-227, **2012**.

М.И. Ақылбаев¹, А. Бейсебаева², А. Ш. Шалданбаев³

¹Региональный социально-гуманитарный университет, г. Шымкент;

²ЮКГУ им. М. Ауезова, г. Шымкент;

³ЮКГУ им. М. Ауезова, г. Шымкент.

О ПЕРИОДИЧЕСКОМ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ ГУРСА ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Аннотация. В данной работе решена задача Гурса в характеристическом четырехугольнике для волнового уравнения специального вида с переменными коэффициентами. Получено спектральное представление решения, не традиционное для таких вольтерровых задач. Для этого в качестве вспомогательной задачи использована спектральная задача для уравнения с отклоняющимся аргументом. Показано, что оператор вида $Su(x)=u(1-x)$ играет роль оператора Шмидта встречающиеся в разложениях вольтерровых операторов.

Ключевые слова: Вольтерровые операторы, индефинитная метрика, задача Гурса, операторы подобия, спектр, спектральное разложение, метод Фурье, ортогональный базис, теорема Гильберта-Шмидта.

М.И.Ақылбаев¹, А. Бейсебаева², А. Ш. Шалданбаев³,

¹Аймақтық әлеуметтік-инновациялық университеті;

²ЮКГУ им. М.Ауезова, г. Шымкент;

³ЮКГУ им. М.Ауезова, г. Шымкент

КОЭФФИЦИЕНТТЕРІ АЙНЫМАЛЫ ТҮРІ АРНАЙЫ ТОЛҚЫН ТЕНДЕУІНІҢ ГУРСАЛЫҚ ЕСЕБІНІҢ ПЕРИОДТЫ ШЕШІМІ ТУРАЛЫ

Аннотация. Бұл еңбекте коэффициенттері айнымалы ал түрі арнайы толқын тендеуіне қойылған Гурсаның есебі шешілді. Шешімнің спектралді кейпі табылды, мұндай жағдай вольтерлі есептерге тән емес. Бұл үшін көмекші есеп ретінде аргументі ауытқыған дифференциалдық тендеу қолданылды. Мынадай, $Su(x)=u(1-x)$, операторлардың Шмидтің операторының қызметін атқаратыны көрсетілген

Тірек сөздер: Вольтерлік операторлар, индефинитті метрика, Гурсаның есебі, ұқсастық операторы, спектр, спектралді таралым, Фуренің әдісі, ортогоналді базис, Гилберт-Шмидтің теоремасы.

Information about authors:

Akylbaev MI - vice-rector Regional Social-Innovational University, Shymkent;

Beissebaeva A. - teacher of the department "Mathematics" M.Auezov South Kazakhstan State University, Shymkent;

Shaldanbayev A.Sh. - Doctor of physical and mathematical sciences, professor of the department "Mathematics" M.Auezov South Kazakhstan State University, Shymkent.

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 1, Number 317 (2018), 51 – 62

UDC550.837

S. Baydullaev, S. S. Baydullaev

Technical College, Shimkent, Kazakhstan;
Partnership with Limited Responsibility «Kaztransgaz Productions», Shimkent, Kazakhstan.
e-mail: s_baydullaev@mail.ru; ahmet_87@bk.ru

ANALYSIS OF MAGNETOTELLURIC SOUNDING

Abstract: 1. Critical analysis of geophysical method's way of geology on magnetotelluric sounding for the first time in more than 60 years of its existence was carried out.

2. The analytical conclusions that had never been expressed earlier have been published. As a result of analysis of the notions such as skin-effect, quasi-stationary approximation, impedance, electric induction current, a conduction current, applied to the cosmic variations of magnetic perturbation theory as the basis of the method conclusions have been done that “their application for the purpose of geologic prospecting is not justified”.

Keywords: earth interior, geophysics, electrometry, skin-effect, impedance, quasi-stationary approximation, electric induction current, conduction current.

In the middle of the last century, the proposal of the scientists to utilize the space sources of natural electromagnetic waves (NEMW) as a power that seemingly were necessary for geological prospecting for mineral resources would have been not less than offering a miracle. But to bring that idea to practical implementation it was necessary to prepare its theory, then bring to existence the instruments for registration of NEMW, develop a methodology of the field work and obtaining information and data, the ways of processing and interpretation of the latter.

In the late 50-s of the 20th century, all was ready for this end, and planned works were included in the government production plans of the USSR and work started nationwide.

The registering instruments having been developed, in the process of production works, the absence of the NEMW that supposed to have period lengths from the initial tens minutes to days and longer in nature. We have been informing the persons responsible for production on that since 1977. But neither before, nor after us (since 1986) no one of experts anywhere and ever produced a sound on the matter. None the less, the geologic prospecting work by the method of magnetotelluric sounding (MTS) is continued till now, and huge funding of our peoples was spent for it in the recent 60 years.

Such a situation (*absence of long period waves*) pushed us from the very beginning to independently seek its causes. As the result of the long lasted and wide-scale analytical studies, in 1985, we arrived to the final conclusion that there is no long period NEMW in nature. The previous paper covers this matter in details.

The further analysis of the condition (theoretical bases) of MTS method revealed other aspects of the theoretical construction not meeting the reality, too. In the present paper, we publish the results of the carried analysis.

The theory of MTS is based on a number of physical and mathematical categories, i.e. physical laws, phenomena, and conceptions. The following concepts are used in the MTS: ionosphere sources of electromagnetic waves (*EMW*), skin-effect, impedance, Fourier transformation, a conduction current, a displacement current, etc. In the present paper, we define the place of some of MTS those categories that had not been discussed earlier.

The theorist suggests the used the following beliefs:

1. The variation of the magnetic field originating from ionosphere are natural electromagnetic waves, indeed, otherwise, waves needed for the MTS could be constructed of them;

2. It must be beyond any doubt that those cosmic variations of magnetic field may be used for prospecting the earth interior;

3. displacement currents may not be taken into account in the cosmic electromagnetic wave processes considering them absent in the waves;

4. In the applied quasi-stationary conduction currents feature wave properties and its wave number ($k = \sqrt{i\omega\mu\sigma}$) has its necessary place of application in the method;

5. The Earth may be conditionally considered as a medium that does not feature magnetic properties, or these properties are weak. Then, the wave number is expressed as ($k = \sqrt{i\omega\mu\sigma e^{i\pi/4}}$), respectively.

Below, taking into account all these listed factors for multilayered structure, we remind the shortest essence of the theoretic bases of MTS, the main of magnetotelluric methods [1: p.p. 17-21, 12: p.p. 219-220].

In MTS, the characteristic impedance of the medium to the electromagnetic field (EMF) is found first, i.e. scaled impedance of the material that the medium (*the part of Earth under question*) consists of. For the homogeneous ($h_1 = \infty, R_n = 1$) structure impedance: $Z_1(0) = -i\omega/k_1 = \omega\mu_0/k_1$. Taking into account the two last formulae, in-impedance is found: $|Z_1| = (\rho_1/2T)^{1/2}$. Here, $Z_1(0)$ is impedance at the border of atmosphere and the Earth. Further, we term the impedance defined at the Earth surface in-impedance. Resulting from that, $\rho_1 = 2T|Z|^2$, or $\rho_{eff} = |Z_{eff}|^2/(\omega\mu_0)$ [12: p. 220].

For multilayered structure, in-impedance is $Z_1(0) = (\omega\mu_0/k_1)R_n$ [6: p.150]. Under these conditions, the given formula defines an effective parameter, which has the meaning of seeming impedance. It is marked as ρ_T : $\rho_T = 2T|Z|^2 = 2T|E_x/H_y|^2$. In practical units it is $\rho_T = 0,2T|Z|^2$, [s.(m\sqrt{km.nTl})²]. The impedances that have the same meaning are termed respectively: ρ_1 – impedance of the first layer, and ρ_{eff} – effective specific impedance. Only, impedance here is defined as ratio of electric and magnetic fields (EMF) intensity. Taking into account R_n and conditional non-magnetism of multilayered medium $\rho_T^n = \rho_1|R_n|^2$ is found. Here, n is number of the layer in multilayered structure, [12: p. 220]. For such conditions, the depth of underground conductive layer is found in the field (*practical*) measurement units: $h_1 = \sqrt{10\rho_b T_b}/8,9 = 0,1592 T Z$, [1: p.p. 26-30]. Here, ρ_b and T_b are intersection coordinates of prior computed theoretically graphs of these two parameters on a special palette. Sometimes, this latter formula is called an effective depth, too. [Завадская Т.Н. Некоторые свойства кривых МТЗ, Прикладная геофизика, вып.40, 1964; Яковлев Г.Е. и др., 1975г; Анищенко Г.Н., 1963].

When solving the electrometry problems, electric and magnetic fields that are members of Maxwell equation, need to be considered separately. Such problem can be solved to the medium with constant physical parameters. Differential equations emerging at the solution of such problem are termed telegraph equations. The telegraph equations represent the process of propagation of EMW within the homogeneous transmission line, through which information is transmitted. The equations are as follows:

$$\Delta \mathbf{E} - \mu \varepsilon d^2 \mathbf{E} / dt^2 - \mu \sigma d \mathbf{E} / dt = 0; \Delta \mathbf{H} - \mu \varepsilon d^2 \mathbf{H} / dt^2 - \mu \sigma d \mathbf{H} / dt = 0.$$

Here in both formulae, the second members are elements of displacement current and the third members are elements of conduction current. As it has been said, as the MTS uses parameters that are considered elements of super long waves, as well as quasi-stationary approximation, displacement current present in the first Maxwell equation is dropped off in its theory. Then, the remaining parts of formulae, if solve them for one direction of the Laplace operator only, will turn into diffusion formulae: $\Delta \mathbf{E} - \mu \sigma d \mathbf{E} / dt = D \cdot \Delta \mathbf{E} - d \mathbf{E} / dt = 0$; $\Delta \mathbf{H} - \mu \sigma d \mathbf{H} / dt = D \cdot \Delta \mathbf{H} - d \mathbf{H} / dt = 0$, i.e. into the second A. Fick law. Here, $D = 1/\mu\sigma$ – diffusion factor. At this quasi stationary approximation to EMF it becomes independent on dielectric permittivity of the medium. Now, if, willing to attach wave meaning to the formulae, to introduce wave numbers into them, then they, in a new form, will turn into Helmholtz equations for standing waves: $\Delta \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = \mathbf{0}$; $\Delta \mathbf{H} + k^2 \mathbf{H} = \mathbf{0}$. Here, for vacuum $k^2 = \omega^2 \varepsilon \mu / c^2$. The wave number for conductive medium is imaginary number: $k^2 = \omega^2 \varepsilon^k \mu / c^2$. Such wave equations, where right sites are equal zero, are equations for standing wave, not that for the (*running*) processes of their movement. It means that a wave in the process of its progress must preserve (not loose) its energy, and other processes, filling losses of continuously running EMW. For this to take place, such a wave needs to have unexostable source of power. Thus, the Helmholtz equations for stationaty waves are equations for

standing waves. Their solutions are spatial constant values of the EMF components in the EMW active zone. As one can see, such conditions can be satisfied neither by the wave itself, nor by the cosmic source of NEMW. In addition, we would like to say the coming from the space are not EMW, rather variations of magnetic field.

But the developers of MTS by means of replacing these formulae with formulae of vertically falling (i.e., along z axis only) of monochromatic flat EMW on parallel layered media in geology, obtained one dimension differential Helmholtz equations of the second order: $\frac{d^2 E_x}{dz^2} = \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{d^2 E_x}{dt^2} = k_m^2 E_x$; $H_y = \frac{k_m^2}{i\omega} \frac{dE_x}{dz}$ (the latter equation may be obtained from the Maxwell equations). The both formulae have been derived for the plane waves propagating in the opposite to each other directions in dielectric medium: $E_x = A_m e^{-k_m z} + B_m e^{+k_m z}$; $H_y = -(k_m/i\omega)(A_m e^{-k_m z} - B_m e^{+k_m z})$. Here, A_m , B_m are presented as constants connected with structure parameters and wave frequency, [1: p. 19]. Indeed, they are presented, in MTS, as the amplitudes of wave falling from the space (A_m) and reflected (B_m) waves, and exponents $e^{-k_m z}$ and $e^{+k_m z}$ represented as sum (or standing wave process) of flat homogeneous waves falling from the space and reflected upwards from internal layers of entrails of the earth.

As a result of their solution, electric component of EMF in a geologic medium is $dE_x/dz = 0$. But when $\sigma \neq 0$ longitudinal electric component of wave $E_x(z) = E_x(0) \exp(-t/t_0)$ dies out with time [4: p.p. 32-33].

In reality, there are no reflected waves at all. The cause for that is that at quasi-stationary approximation, the EMW subordinates to diffusion equations only, to telegraph or wave ones EMW subordinates to diffusion, but not to telegraph or wave ones, therefore, the name EMW is present here in symbolic terms [6: p. 30-, p.p. 34-35]. As you know, the reflection phenomena is not present in the process of diffusion, it means that there are no reflected waves. For the clarity of problem, let us to consider two cases that correspond MTS. The first one is the case mentioned by A.A. Kovtun. In this case, as on the Earth surface amplitudes of the falling and reflected waves are equal, total magnitude of the field components is doubled at the surface [1: p.p. 19-24]. It means that the reflection factor is 1, the phase shift is absent, the reflected wave is standing one, i.e. wave absorption in the Earth medium is absent completely. Such situation can take place while the wave is reflected from a medium without penetration. If the wave does not penetrate into the medium in question, then no induction current is generated from the wave. The second case – only falling wave is present, the reflected wave is not present. This complies with the routine geologic situation, i.e. the wave is absorbed in the medium completely. Below, we consider versions of the second case to resolve a geologic problem.

The MTS developers borrowed the basic notion of the method, i.e. impedance, from the paper of American scholar G.A. Stretton on the theory of electromagnetism [9]. In this paper, impedance was adjusted for the long lines (or elements of the alternating electric circuit), which EMW propagates along. But, ten years prior to that paper by G.A. Stretton, in 1938, the expressions for impedance of the surface situating in monochromatic EMW developed for theory of antennas more meeting the goals of electrometry were developed in the papers of another scholar from the USA S.A. Shchelkunov [13;14] or in the paper of M.A. Leontovich, the Soviet scholar of 1948 [7]. Had the MTS developers have proceeded from those latter papers, maybe the solutions and proposed expressions could be different.

Skin-effect

While geologic problems are addressed, the MTS method developers, considering the variations of magnetic field as NEMW coming from the outer space using skin-effect as a tool for deep penetration into entrails of the earth explained the theory of method as follows: the source of NEMW is located at the height from the Earth surface, more precisely, in ionosphere, approximately at the height of 80-115 Km (at present the more accurately defined this height is 60 Km at day time and 90 Km at night time); the depth of its penetration into the entrails of earth depends on the wave frequency. It means, according to the theory, knowing the frequencies of NEMW used in MTS, one can determine electric parameters of all the layers from the Earth surface till the depth of their penetration. The depth of penetration of variations coming from the outer space into the entrails of earth was called skin-depth and described it as follows:

$$\delta = 10^{-3} \sqrt{2/(\omega\mu_0\sigma)} = \sqrt{10^7 \rho T / 2\pi} .$$

Here we talk about multikilometer waves – hundreds, even thousands of kilometers – depths of entrails of earth for their geological prospecting. The theory reads that receiving sensors of waves located on the Earth surface receive all the NEMW that bear information from those depths. By processing that information, an analyst can find depths of electric conducting layers and their electric parameters.

In reality, the variations of the space magnetic field (VSMF) that are registered on the Earth surface are source ones, i.e. just arrived from the space. In order to obtain necessary geologic information, they must have been visited the entrails of earth. The variations, at the place of their fall, losing their energy, is subject to full decay. And science studied penetration of waves (!), not that of variations. It means that generation of secondary (*i.e. reflected in the Earth interior*) wave from VSMF is not possible in the skin-depth. It is not possible not to understand this truth.

But while resolving a geologic problem, the actual depth of bedding and geometry of the underground objects are the main ones. It is not an easy task for electrometry. In this case, the necessity of synchronic registration of primary (*falling from the space and penetrating into entrails*) VSMF and secondary (*reflected from the underground layers and reached the Earth surface*) ones must be understandable. Unfortunately, magnetic fields do not travel in the underground, as we said above, they do not have a habit to return.

The reflection factor of EMW is: $R = (A^{ref}/A^0)^2$, here A^{ref} and A^0 are amplitudes of the reflected and falling waves respectively. The ration defining relative index of reflection of two media is equal: $\sin i/\sin r = n_2/n_1 = n_{21}$ (*Snellius law*), where: n_1 and n_2 indices of refraction of the first and second media; i stands for reflection angle; r stands for refraction angle. For reflection of wave, the condition $n_2 > n_1$, i.e. $n_{21} > 1$ must be satisfied. For the medium with no ferromagnetic properties $n_{21} = \sqrt{\varepsilon_2/\varepsilon_1}$, [11: p.p. 304-305]. If the inequality is opposite $n_2 < n_1$, it means refraction of wave on the border. In highly conductive media indices of reflection and refraction are approximately equal.

Any flat EMW remains flat only if it propagates in the medium without absorptions, for instance, in the outer space or atmosphere. And reflection index for low-frequency waves propagating in the medium with absorption is an imaginary number: $n(\omega) \approx \sqrt{i \frac{\sigma}{\omega \varepsilon_0}} = \sqrt{\frac{\sigma}{2\omega \varepsilon_0}} (1 - i)$. Here its imaginary part is incomparably larger than one, i.e. $\text{Im } n(\omega) \approx \sqrt{\frac{\sigma}{2\omega \varepsilon_0}} \gg 1$. Therefore, strong absorption of waves takes place in conducting layers at low frequencies. It means that they do not reflect [7].

Here, it is necessary to specify absolute refraction index, it is $n = c/v$. Here, c is speed of EMW in the vacuum, v is phase speed of wave in a medium. For such a case (*in dielectric*) $\approx \sqrt{\varepsilon \mu}$. The last equation is called the Maxwell's equation, some times [8: p. 219]. There is no dispersion here, dissipation depends of frequency. For the media with no ferromagnetic properties ($\mu \approx 1$), $= \sqrt{\varepsilon}$, [11: p. 304].

In electrometry, in order to ease solution of the problems for complex media (*for instance: anisotropic, linear etc.*), sometimes, sought parameters are replaced by new ones, more efficient for the case. Then, new notions are called in a new fashion: for instance, the specific electric resistance of layers is termed 'effective resistance', impedance is termed 'effective impedance', depth is called 'effective depth' etc. Then, in accordance with the content of new parameters new meanings defining them must be explained. For instance, a new understanding of 'effective impedance' is explained – independence on the azimuthal geometry of anisotropic media, as well as for 'effective depth' – sum thickness of layers till underground highly conductive bedding rock in the entrails. The new coined notion in electrometry must exactly correspond to the definition in the applied electrodynamics. Indeed, 'effective depth' in the electrodynamics is the depth where wave energy is intensively absorbed and completely attenuates. How the wave attenuated in the depth and not having come back to surface can yield information on sum thickness of layers till marker? The theory of MTS does not say even a word on that.

For the waves used in MTS, skin-depth has too large magnitude. Therefore, as you feel, the efficient depth must be smaller than skin-depth. It, for the conductive homogeneous medium in the entrails has been calculated as: $h_{eff} = \frac{\lambda}{2\pi\sqrt{2}} = \frac{\delta}{\sqrt{2}} \approx \frac{Z}{-i\omega\mu_0}$. And the effective depth in Niblett transformation $h_{eff} \approx \rho_k$.

$\int_0^{h_{eff}} \frac{dh_{eff}}{\rho(h_{eff})}$ for the 'Tiknonov-Cangiar' model to resolve geological problem has been adjusted as:
 $h_{eff} = [\rho_k / (\omega \mu_0)]^{1/2} = [\rho_k T / (2\pi \mu_0)]^{1/2}$, [6: p.p. 209-210].

In our opinion, the basics of the theory is the same for all types of waves (*electromagnetic, elastic and others even*). If approach from this point of view is taken, still there are a multitude of not solved problems of resolution of waves and disturbance interference even in the man-made seismic waves that have penetrated the entrails for sure and came back, as well as while extracting useful geologic information from them as well. Seeing that, is it possible to believe in the MTS statements and calculations that with no problems we will obtain desired information using space variations that are not described by wave laws?

The conductive layers in the entrails are absorbing and dispersing always. Any magnetic disturbances getting into such a medium can generate, on its surface, so-called telluric surface alternating earth inductive currents. Those currents converting into Joule warmth only serve to warming of that medium.

Unfortunately, there are no harmonically shaped long period EMW of natural origin. The natural sources (*ionospheric ones*) propagate not waves, rather weak magnetic variations of random shape. It is known in the science and practice. In MTS, many situations are not duly taken into consideration, including absorption of EMW by the earth layers. It means that even the most ideal EMW are not suitable for the purposes of deep (*even thousand kilometers deep, with regard of which MTS has ambition*) electrometry. Moreover, it is known, that their ionospheric sources and recording instruments on the Earth surface are located in different moving inertial coordinate systems. Even this circumstance alone is sufficient to reject any trust in this method.

Just because of that study of the Earth interior by means of skin effect, leave it alone, by means of EMW non-existing in the nature is not possible. If even harmonic EMW existed, then utilization of skin effect in prospecting with MTS does not yield any result. Now, let us clarify this. As there are no NEMW in the nature, it is necessary to study the possibility of using artificial EMW for MTS. Radio waves belong to this type.

In the second half of the 20th century, within the framework of long-term secret project, beginning from the 90-s of the last century, while developing extremely low-frequency generators of any type, it became clear that it was not possible to achieve the targets. Due to the secrecy of the research topics, the results of the research have not been published. As it is known that for the realization of such ventures ideas enormous financial, material, and intellectual resources of peoples have been spent.

As the results of secret research projects did not support in practice penetration of ELF waves through earth and water (*dekameter waves – 3 ÷ 30 Hz*), are not convincing calculations on possibility of their application in the reality, too (*it is said that for sustaining radio connection with submarines in underwater position as well as underground radio communication!!!*). These papers experimentally established penetration of the longest EMW no more than 20 meters of water depth in a condition not suitable for radio communication. Information on these research works, not supported by documents, are published through the media in a blurred shape [3]. Below, based on that information, we provide our conclusions.

For this case, the developers of ELF or ULF (ultra low frequency) generators, with regard of their incomparable wavelength and ultralow efficiency factor demonstrated absolute e of the uselessness of the task they face in the closed projects as well as for the MTS theory, among all.

In the second half of the last century megameter ELF wave – 82 Hz, $\lambda = 3656$ Km, $T = 0.012$ s was developed for operation of the Soviet «ZEVS» system, and 76 Hz, $\lambda = 3944.64$ Km for the American system «Seafarer». The lengths of waves those generators produce are comparable with the Earth radius. For them to operate, megawatt power stations were needed. But to register the waves they generated dipole antennas of the length of not shorter than a half of the wave length had been built, and this happened to be an unresolvable problem. Therefore, if at any time in the future it is possible to build generators, they cannot be mobile ones, i.e. to be compact and capable of prospecting interior of the Earth.

As it can be understood from the above, it is not possible to build and use in the reality even more clumsy long period EMW that are considered trivial ones that even feature periods one second to 24 hours and longer. Even there had been an ideal ionosphere EMW with diurnal period it would be wavelengthwise by 7 million times longer than ELF wave from «ZEVS». And we leave the calculation of wavelength with a period of 24 hours.

Therefore, we remind below how other frequencies of radio waves are created.

The sources of low frequency radio waves which range in the ELF (*dekameter waves* – 3 ÷ 30 Hz), ULF (*megameter*, 30 ÷ 300 Hz), infralow frequencies (*ILF, hectokilometer*, 0,3 ÷ 3 KHz), very low frequencies (*VLF, myriameter*, 3 ÷ 30 KHz), and long waves (*LW, kilometer*, 30 ÷ 300 kHz), are generators of alternate current.

Generators of radio frequencies are sources of radio waves with frequencies $3 \cdot 10^5 \div 3 \cdot 10^{12}$ Hz, UHF generators, mass radiators, and tube oscillators.

Heated bodies are sources of visible light and infrared waves.

Atoms excited by means of irradiation through the collision of accelerated charged electrons and photons are sources of X-Rays and ultraviolet rays.

As you see, it so happens that there is no any single method and equipment even for generating of radio waves used in practice. The properties of these EMW with different frequencies are totally different as well. Among those groups, generators of alternate current are the closest to MT sources range wise.

Now, let us tell in more detail about skin effect. The characteristics of skin effect for free electrons can be obtained by means of a solution of kinetic Maxwell equation. Here, while solving these equations it is necessary to be up to establish a connection between current and EMW.

For the first time, the skin effect was revealed by O. Heaviside, and English scholar in 1885-1886 in the form of condensation of alternating electric current in the thin surface layer of a conductor, and in 1886, his compatriot J. Hughes detected it in an experiment. The connection between the frequency of current and thickness of the surface layer where alternating current accumulates in this effect had been established.

Later, a similar case – penetration of EMW to a different depth in correspondence with frequency was discussed. The both depths were called skin depth. For the second case, skin effect is a condensation of alternating EMF in the thin surface layer of conductive medium corresponding to its frequency. This layer is termed as skin layer and its gage (δ) is called skin depth. The effect is revealed when current (*induction*), excited by free electrons in a conducting medium, metals, plasma, in ionosphere (*on short waves*), degenerate semiconductor, as well as in other media that feature sufficiently high conductivity.

And here, skin depth depends on frequency (f) of the generating EMW, conductivity (σ) of the medium, dielectric (ε) and magnetic (μ) transmittivity as well as flatness of the medium surface. The effect for cross waves and alternating currents is observed in near surface shape. As it is known, the EMW are cross waves only.

In order to obtain the desired result in non-ideal (*absorbing, dissipating, dispersing etc.*) media, energy loss connected with condition and content of the medium must be taken into account, as the amount of energy spent by the wave may be insufficient for useful work to be produced by the wave in the interior.

For this purpose, absorbance index may be calculated according to the formula $\kappa = \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{-\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 + (60\lambda\sigma)^2}}{2}}$, where: ω stands for circular frequency; c is length velocity; λ stands for the wave length; σ is electric conductivity of the medium; ε stands for dielectric permittivity of the medium (*dielectrical constant*). If $\kappa = 1$, then energy of EMW is subject to complete absorption in the Earth [7].

The energy (W) of EMF in a volume unit of the medium is equal to sum of the energy of field in vacuum and energy of medium charges movement in the wave field. And heat (Q) emitted in a unit of time is equal to work of forth of friction. The formula to find magnitude of heat is as follows: $Q = \frac{\omega \varepsilon'' |E_0|^2}{8\pi}$,

where: $\varepsilon'' = \frac{4\pi N e^2 \nu \omega}{m[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \nu^2]}$ – is imaginary component of the complex dielectric permittivity; N is

volume concentration of micro particles in the medium in question; m stands for the mass of electron; e is elementary charge; ν stands for frequency of collisions of the charge with micro particles.

Unfortunately, it is not possible to express energy through dielectric permittivity. When $\nu = 0$, $\epsilon'' = 0$, and $Q = 0$, as well (*i.e. such a situation correspond to the outer space*), in other words, for a case, when, as a result of wave process the wave travels through the medium without delay, its energy is found via the following formula: $W_E = \frac{|E_0|^2}{16\pi} \frac{d(\omega\epsilon)}{d\omega}$. Here you will see that EMW cannot penetrate in the Earth interior, [4: p.p. 94-97].

At low frequencies, when the dispersion frequency may be neglected and ϵ_0 not be taken into account, skin depth will be equal: $\delta = \frac{c}{\sqrt{2\pi\omega\sigma_0}} = \frac{c}{n\omega}$, where $n = \sqrt{2\pi\sigma_0/\omega}$ – refraction factor comparable with the wave's phase velocity.

Now let us itemize our conclusion to what depth the EMW can penetrate depending on the physical (*including account of* μ) properties of the medium. Therefore we introduce tangent of the loss angle: $tg \delta = 4\pi\sigma/(\omega\epsilon)$. For strongly decadent wave ($tg \delta \gg 1$): $\approx \kappa = \sqrt{(\mu\epsilon/2)tg \delta} = \sqrt{2\pi\mu\sigma/\omega}$. We see from that that magnitude of loss and phase velocity depend on frequency as well (*dispersion phenomenon*). But in this case the wave process does not come to being, as the wave fades on very short distances: $\delta = c/(\omega\kappa) = \lambda/(2\pi\kappa) = \lambda/(2\pi\sqrt{2\pi\mu\sigma/\omega}) = \lambda/(2\pi\sqrt{\mu\sigma T}) = \frac{c}{2\pi}\sqrt{T/(\mu\sigma)}$, [4: p. 34].

In good conductors, absorbance index (κ – *speed of wave amplitude decrease in the direction of propagation*) and refraction index (n – *determining phase velocity*) are approximately equal $\approx n \gg 1$. Thus, the depth of penetration of EMW into conducting medium (*thickness of skin layer*) must be shorter than the wave length: $\delta \ll \lambda$, [4: p. 35].

Now, for the ideal radio waves in the terrestrial conditions, we find through formulae $\delta = c/\sqrt{2\pi\omega\mu\sigma} = c/(2\pi\sqrt{\mu\sigma T})$ the physical parameters resulting from skin phenomenon, [2: p. 308]:

If $T=1s$, $\mu=1$, $\sigma=10^3 S/m$, then $\delta=1,510 Km$, $h_{eff}=1,067.7 Km$;

If $T=1s$, $\mu=1$, $\sigma=10^0 S/m$, then $\delta=47,728 Km$, $h_{eff}=33,749 Km$;

If $T=1s$, $\mu=1$, $\sigma=10^{-3} S/m$, then $\delta=94,866 Km$, $h_{eff}=67,079 Km$;

Such an EMW for MTS exists neither in nature, not in technology. Had it even existed, as you see the depth of its penetration, it is of no use for addressing geological problems?

For the ZEVS wave frequency $f = 82 Hz$, if:

$\mu=1$, $\sigma=10^3 S/m$, then $\delta=167 Km$; $h_{eff}=1,273 Km$;

$\mu=1$, $\sigma=10^0 S/m$, then $\delta=5,270 Km$; $h_{eff}=3,726.8 Km$;

$\mu=1$, $\sigma=10^{-3} S/m$, then $\delta=166,667 Km$; $h_{eff}=117,850 Km$.

ZEVS generator producing such wave cannot be used for addressing geological problems. Therefore, let us consider similar case for the radio waves with higher frequencies. If:

$f=300 Hz$, $\mu=1$, $\sigma=10^3 S/m$, then $\delta=87.14 Km$; $h_{eff}=61,62 Km$;

$f=300 Hz$, $\mu=1$, $\sigma=10^0 S/m$, тогда $\delta=2,756 Km$; $h_{eff}=1.948 Km$;

$f=3 KHz$, $\mu=1$, $\sigma=10^3 S/m$, then $\delta=27.5738 Km$; $h_{eff}=19.5 Km$;

$f=3 KHz$, $\mu=1$, $\sigma=10^0 S/m$, then $\delta=871.39 Km$; $h_{eff}=616.2 Km$;

$f=30 KHz$, $\mu=1$, $\sigma=10^3 S/m$, then $\delta=8.7139 Km$; $h_{eff}=6.16 Km$;

$f=300 KHz$, $\mu=1$, $\sigma=10^3 S/m$, then $\delta=2.757 Km$; $h_{eff}=1.94 Km$.

As one can see, if at these conditions, formulae for finding the skin depth and effective depth are good for application, then for electrometry, it happens, it is possible theoretically possible to use radio waves for which generators are already available.

In compliance with the theory, the most remote sources of radio waves are applied for this end. The cause of that is quasistationary approximation, *i.e.* in necessity of many fold longer wavelength as compared to the distance to its source. This case corresponds to the condition of radiating far field region. Then $|k_1|r \gg 1$, or $r/\delta > 3-5$, where: k_1 stands for wave number of homogeneous medium; r is distance from ionospheric source of EMW to receiving MT station on the Earth surface. Only when this condition is

satisfied, i.e. at this distance necessary EMW will have time to take shape till the point of registration on the Earth surface. This condition corresponds to the following case: at the height of NEMW source $r = 60 \div 90$ Km, for the condition to be satisfied, if we take $\rho_k = 1000$ [$\Omega \cdot \text{m}$], then skin depth must be within the range of $\delta = 18 \div 30$ Km. This basically corresponds to the frequency range $1 \div 3$ KHz, and the frequency, in compliance with the medium conductivity, may increase till 300 KHz.

That said, it will be used electric induction current instead conductivity current, i.e. abandon quasistationary approximation. Moreover, in the theory employed, the power of the wave source is not taken into account as in quasistationary approximation the wave does not have wave properties. Through “waves” with wave properties, it is not possible to reveal physical properties of the medium in question.

Indeed, an electric induction current is just alternating electric current in conducting medium and/or alternating electric field in atmosphere (as well as in ionosphere). If disregard this, then conductivity current remains only. In this case, MT theory will forfeit all the rights to use the laws of wave process including all the consequences it entails (i.e. wave equation, wave number, skin effect, skin depth, effective depth, impedance etc.). At the harmonic changes of electric field amplitude of electric induction current density in dielectrics exceeds the amplitude of conductivity current density. In compliance with definition of electric induction current density the following condition is satisfied in dielectrics: $\omega \varepsilon E > \sigma E$, or $\omega \varepsilon / \sigma > 1$. The meaning here—the medium resists travelling of the electromagnetic field through it in compliance with its frequency (in direct ratio). This resistance may be called reactance. Thus, depending on the wave frequency the same matter may appear as both dielectric and conductor. It corresponds to boundary condition of near-field zone, i.e. $|k_1| r \ll 1$, or $r / \delta < 0.5$, where $\delta \cong 503,29 \sqrt{\rho_k T}$ is thickness of skin layer in homogeneous earth. Thereat, components of electric field depend on electric conductivity of earth but do not depend on frequency of the field, and the magnetic component does not depend on anything. It means that EMF is similar to the field of direct current, and skin effect does not work thereat. Therefore, for such a case, it is not possible to use such a field generated by the conductivity current.

According to the boundary condition, for the MTS method that uses radio waves within the depths range $\delta = 120 \div 180$ Km, the wave frequency may decrease to 3 KHz. It means such cases must be experimentally checked mandatorily. Under refusal from the quasi-stationary field and taking into account electric induction current actual depth of study will fall down up to 1000 times.

If we take into consideration such data and approach from the assumption of linearity of medium for ordinary waves in the MT-method almost whole geologic medium happen to be linear. Therefore, in its initial theory, it will be appropriate in the formula of wave number to not include conductivity current but include the electric induction current [5].

But in the practice, attempts to apply radio waves never stopped. The first effective attempt was undertaken by Sweden in 2001. In the University of Uppsala, a generator was developed emitting EMW in the frequency range of 1 KHz \div 10 KHz. This controlled source of EMW was developed for MTS. Therefore, this method was called “radio MTS” (RMTS). At present sophisticated version of the method is being developed under name RMT-K. EMW of the frequency range is 1 KHz \div 1 MHz. The depth of study at such high frequencies does not exceed 50-60 meters, 100 m the largest. This is the depth that allows opportunity to check results of the method. At present, as we have mentioned above, the method of RMT-K is applied upon introduction electric induction current into the theory instead of conductivity current. If here the results obtained are real ones and experimentally corroborated, then this method is worth respect [10]. From the very beginning, the work on MT methods had to be started from the situations available for corroboration. Nothing lasts forever in this world. As time passes, the MT methods merits and their types as well change beyond recognition. We have achieved this at the minimum cost.

Impedance

The term *impedance* was coined by the British scholars O. B. Heaviside and O. Lodge. The US scholar S. Schelkunoff introduced the notion of field impedance in 1938. On the skin effect, there are notions of impedance of the alternating current electric circuit impedance and impedance of conductive surface in the monochromatic EMF (*field impedance and surface impedance*).

The complex (*full*) resistance of element of electric circuit $|Z| = \sqrt{R^2 + X^2}$ is termed as module of its impedance, where R is active resistance (*to direct current*), and X is reactive one (*to alternating current*), i.e. frequency depending and imaginary resistance. Here impedance is measured by unit of electric resistance *om* in the international system SI, and in the Gauss (SGC) system it does not have unit of measure. In SGC, impedance is a proportionality factor between \mathbf{E} and \mathbf{H} components of field, and does not have any physical meaning. But if we want to recognize it in SGC as resistance of medium, then it will feature unit of reverse speed. Nonetheless, such a definition would be not quite correct. Therefore, to solve geological problems, first we will consider impedance as reactive (*inductive*) resistance of medium to the current excited in one by monochromatic EMF. Therefore, we take impedance effectively describing ordinary absorption of the wave energy in conductors, as approximate connecting factor between tangential component \mathbf{E} and \mathbf{H} of the harmonic flat EMF at the boundary «vacuum-metal»:

$$\mathbf{E}_2 = Z \cdot \mathbf{H}_2 = \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}} [\mathbf{H}_2 \mathbf{v}], \text{ [SI], where } \mathbf{v} \text{ – unitary vector, vertically (along normal line) falling on the}$$
 division border. Here, EMW moves according to right-hand rule. At such conditions, according to Leontovich boundary conditions, refraction index (n) on the boundary must satisfy the following requirements: $|n_2| \gg n_1$, $\delta \ll L$, where: n_2 is refraction index of the conducting layer; n_1 is refraction index of empty space; δ stands for skin depth; L stands for the thickness of conducting layer. Here, one talk about transition of EMW from vacuum in metal (*in our case – from the outer space in the Earth*). Here, along the movement direction of wave, the atmosphere is considered the first, and the Earth surface is the second layer [7]. If the boundary surface curvature $R^k \gg \delta$, then Leontovich boundary conditions are effective, [5]. Indeed, impedance may be calculated for any surface with known electric parameters (*i.e.* $\varepsilon_n, \mu_n, \sigma_n$). Impedance calculated this way on the boundary surface «aer-metal» is termed surface impedance. The physical meaning of impedance does not change. In the case in question, impedance matches characteristic impedance (*resistance*) of the second medium, extending like homogeneous long metal. At not so high frequencies, for the medium with flat surface and high conductivity, we obtain the following: $Z = (1 + i) \sqrt{\frac{\mu\omega}{8\pi\sigma}}$, where σ stands for specific conductivity with regard of direct current. S. Schelkunoff was pioneer to publish this solution in 1938, [13;14]. Later, in 1948, Leontovich found the most precise expression for impedance obtained for homogeneous metallic conductor with the flat surface [7]. Impedance of the empty space is calculated by the formula $Z = E_x/H_y = 120\pi$ [Ω], and it is sometimes called characteristic impedance of vacuum. According to the MTS, for high electric conductivity, the equivalent formula of the specific electric resistance of layer in the SI will look as follows: $\rho_k = 0,2 T Z^2$, [$\Omega \cdot \text{m}$]. The both correspond to the above original. But the matter is different. This Leontovich boundary condition is called impedance condition in the applied electrodynamics, besides, it can be used when the structure of field in the second conducting medium is known in advance only. In the case of concrete problems, the equivalent boundary conditions are approximate only and have conditions of applicability on their own. While solving them, these conditions must be many times and very accurately checked again and again in advance.

The meaning of the Leontovich boundary conditions: it is possible to find impedance on the boundary with the first medium (*the empty space*) through physical parameters of the second conducting medium. In the MTS, in contrary to the said, an attempt has been undertaken to find electric parameters of the second internal medium (*the Earth*) through found impedance outside (*on the Earth surface*). The field impedance in question has been introduced by S. Schelkunoff and Leontovich for use in the theory of antennas. It means, knowing in advance electric properties of the antenna material, it was important to derive necessary information through the magnitude of energy proper to the transmitted radio signal and the part of it absorbed by the antenna. The EMW energy had not lost, the field impedance would have the meaning of the real value. Then it can be considered wave resistance. But, while solving geological problems, loss of own energy of EMW happens to be unlimited.

In geology, if not for specification of the lower boundaries (*geometry*) of the layer coming out to the daily surface, для нахождения его физических свойств, there is no need to carry out electrometry

work. Here, the sought parameters are the physical parameters and geometry of the objects inside the Earth. The simplest cut of the Earth is cut with horizontal layer. Therefore, we consider application of the method of the metallic antenna in the empty space using impedance for solution of problems not appropriate way for searching underground objects in the interior, their physical parameters, and geometry. In the case of metallic antenna, there are two media – the empty space and metal, but in geology, there are the empty space (*atmosphere*) and the set of infinitely absorbing earth layers. Here, the most important is balance between energy of EMW and volume of absorbing medium, i.e. for the first case – with limited volume of the antenna material, and for the second case – with unlimited volume of the Earth layers. Finding such a balance, by means of measurement, of energy of refracted radio waves and limited volume of the antenna material is solved problem in the theory of antennas. Given the infinite volume of geological layers, there is no any possibility of finding such a balance.

In the conditions of MTS, which corresponds to falling of the wave along normal, the set of three, i.e. $\mathbf{E}_{x,y}$, $\mathbf{H}_{x,y}$ and the Poynting vector on positive direction to the Earth interior along vertical z axis forms the right-hand screw. As impedance appearing at the intromission of the wave into the medium is the full resistance of the medium, at its zero value such a medium has ideal conductivity and strong absorption. Then, when there is such an absorbing layer on the bottom, $\mathbf{E}_{x,y} = 0$ on the surface of the medium. The reflection index found by the amplitudes of fields and expressed through impedance $(Z^{(2)} - Z^{(1)}) / (Z^{(2)} + Z^{(1)}) = \Gamma$ corresponds to such a situation. This Fresnel formula. It mean that the energy of EMW is fully absorbed by the underlie Earth layers that are infinite volume.

For estimation of electric situation in the geologic object in question, such a phenomenon ($\mathbf{E}_{x,y} = 0$) can serve as a sign for approximate estimation of electric conductivity of underlie layer. If the conductivity in this layer is high but finite, then insignificant tangent component $\mathbf{E}_{x,y}$ appears on the surface of discontinuity. Exactly this strength determines power flow inside the conductor spent for its heating.

If the current is connected with the medium conductivity and $\mathbf{J} = \mathbf{J}_{np}$, then, to calculate the power of heat lost, the following formula may be used $p_T = \mathbf{J}_{np} \mathbf{E} = \sigma |\mathbf{E}|^2$. This is Joule–Lenz law in a differential form, where \mathbf{J}_{np} stands for conductivity current, and σ stands for the medium conductivity. The above mentioned is known in technology.

For the plane wave, let us find relation between magnitudes of electric and magnetic fields strength on the boundary «air–Earth». For this end, using the second Maxwell equation ($\text{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi\sigma}{c} \mathbf{E}$), exponential law of electric wave $E = E_0 \exp(\pm \kappa z)$ in the direction of falling on the Earth along normal (z) and characteristic depth of the skin layer ($\delta = c / \sqrt{2\pi\omega\mu\sigma}$), let us compose the equation $\mathbf{E} = (1 + i) \frac{c}{4\pi\sigma\delta} \mathbf{H} \times \mathbf{m}$. From that, we find impedance $Z = (1 + i) c / 4\pi\sigma\delta = (1 + i) \sqrt{\mu\omega / 8\pi\sigma}$. This formula gives the full expression for the surface impedance (for the day time surface of the Earth). Here, \mathbf{m} is unitary vector, κ is the wave vector directed along the axis (z) of the wave fall, c is the light velocity, σ stands for the static conductivity of the strongly conductive medium at low frequencies, [2: p. 308].

For plane waves in homogeneous isotropic medium $\mathbf{E} = -\sqrt{\mu/\varepsilon} [\mathbf{H} \mathbf{m}]$ and impedance corresponding to one is equal $Z_0 = \sqrt{\mu/\varepsilon}$. This relation is true for any point of the medium including the surface. Here vectors \mathbf{E} , \mathbf{H} , \mathbf{m} a right orthogonal tray of vectors. This relation is termed impedance of the medium and considered the Leontovich boundary condition, [4: p. 33].

For the cases of normal and abnormal (*except* δ) skin-effect, the surface impedance (Z) has the most precise quantitative meaning. At the normal skin effect for low frequencies, impedance is equal $Z = 2\pi\omega / c^2 \sigma_0$ and decreases along with temperature (T°) as σ_0 increases.

In order to resolve the problem correctly through this relation, components of electromagnetic field $\mathbf{E}(t)$ and $\mathbf{H}(t)$ must be measured directly in the Earth interior, i.e. in the medium in question, at the depth, by instantaneous values (*i.e. not by the wave amplitudes or variations*). Only then impedance corresponds to its definition. Had we were able to carry out such measurements, then there would be no need for electrometry with the MTS method.

Mathematical techniques have been derived to find the bedding depth of interior layers of the Earth

and their electric parameters. In geophysics, such operations are called the interpretation of the processed data of field materials.

Given the above, any new method offered, prior to introduction to practice, must be submitted to comprehensive theoretical examination to the council of scholars in the field, experimental testing, in the prior studied testing ground, in natural conditions (*full-scale modeling*), and only approval of the usefulness by the experts it may be approved for utilization in production.

Study of interior electric currents of the Earth and magnetic fields by means of full-scale only will give accelerated, explosive growth and invaluable contribution to the development of the fundamental and applied research (*including solution of the geology as well as seismology problems*). Therefore, we believe that such studies will develop the theory of electrodynamics of complex media and advance it immensely. Such multidisciplinary full-scale studies must be carried out in the complex along with drilling ultra-deep wells.

As is known, in ultradeep well in the Kola Peninsula (*Murmansk oblast*), where drilling was completed in late 1982 at the depth of more than 12 Km, MT variations were registered only once at the depth of 6 Km. As we know, then it happened «the Kola well management guarding it even stronger than a spaceship by a narrow margin agreed to lower the probe of MT instrument to the depth of 6 Km only». Now, the data registered by the instruments developed for that purpose especially in the early 2000-s, filled the ranks of «archive valuables». By present, both the Kola ultradeep well and its dedicated site are annihilated and the special instruments lowered in the well as about to be annihilated.

To develop such equipment for well studies and their application at the Kola well, we put together and proposed special research project, in 1990. At that time, the leaders of research academic institutions that possessed power and influence did not give full play to the project. If our proposals had introduced at that time, all that problems would have been studied and resolved 28 years ago, already.

We would like to believe that natural earth electric currents exist at all levels of depth. It can be checked and proven by the interior observation in deep wells. But the causes for such current to come existence may be various. For the time being, the science tells that in the Earth interior, stray voltage, man-caused, electrochemical, thermoelectric, convection currents, and other types of electric currents are present, besides the Earth currents. For all that, only the results of real interior observation in the deep well may provide exhaustive answers to almost all these questions. But even at presence of any type of the above electric currents and EMW, the matter of their utilization for electrometry or any other purpose is open and exceeding efforts of scholars are needed.

REFERENCES

- [1] Berdichevskij M. N., *Jelektricheskaia razvedka metodom magnetotelluricheskogo profilirovaniia*, Moskva, Nedra, **1968**.
- [2] Bredov M.M., Rumjancev V. V., Toptygin I. N., *Klassicheskaja jelektrodinamika*, Moskva, Nauka, **1985** g.
- [3] Vikipedija, internet.
- [4] Vinogradova M.B., Rudenko, A.P. Suhorukov, *Teorija voln*, Moskva, Nauka, **1990** g.
- [5] Grigor'ev A. D., *Jelektrodinamika i tehnika SVCh*, Moskva, Vysshaja shkola, **1990** g.
- [6] Zhdanov M. S., *Jelektrozvedka, M., «Nedra»*, **1986** g.
- [7] Leontovich M.A. O priblizhennykh granichnykh usloviiah dlja jelektromagnitnogo polja na poverhnosti horosho provodjashchih tel. Sb. «Issledovaniia po rasprostraneniuiu radiovoln», izd. AN SSSR, vyp. 2, **1948**.
- [8] Ovchinnikov I. K., *Teorija polja*, Moskva, Nedra, **1979** g.
- [9] Strjetton Dzh. A., *Teorija jelektromagnetizma*, OGIZ, **1948** g.
- [10] Shlykov A. A., dissertacija na temu: «Interpretacija dannyh metoda radiomagnetotelluricheskikh zondirovanij s kontroliruemyim istochnikom», S-Peterburgskij GU, **2015** g.
- [11] Javorskij B.M., A.A. Detlaf, *Spravochnik po fizike, M.*, Nauka, **1980**.
- [12] Jakubovskij Ju. V., *Jelektrozvedka, M., «Nedra»*, **1973**.
- [13] «Electromagnetic Waves in Conducting Tubes», *Phys. Rev.* 52, 1078-1078, November **1937**,
- [14] «On Diffraction and Radiation of Electromagnetic Waves», *Phys. Rev.* 56, 308, **1939**.

С. Байдуллаев, С. С. Байдуллаев.

Техникалық колледж, Шымкент, Қазақстан;
"Қазтрансгаз өнімдері" ЖШС, Шымкент, Қазақстан

МАГНИТОТЕЛЛУРЛЫҚ ЗОНДЫЛАУ ӘДІСІНІҢ ЖАҒДАЙЫН ТАЛДАУ

Аннотация. 1. Жер қойнауын геологияның геофизикалық барлауындағы магнитотеллулық зондылау әдісіне, оның 60 жылдан астам тарихындағы өмірінде, алғаш рет талдамалық сын жариялануда.

2. Мақалада ілгері айтылмаған талдау қорытындылары жариялануда. Нәтижеде, магнитотеллулық зондылау әдісінің негізі ретінде ғарыштық электромагниттік ауытқуларға қолданылған скин-құбылыс, квазистационарлық жанау, импеданс, жылжымалы ток, өткізгіш ток түсініктері талқыланып, олар геологиялық барлау мақсатында орынсыз қолданылған деген қорытындылар шығарылған.

Түйін сөздер: жер қойнауы, геофизика, электрбарлау, скин-құбылыс, импеданс, квазистационарлық жанау, жылжымалы ток, өткізгіш ток.

С. Байдуллаев, С. С. Байдуллаев

Технический колледж, Шымкент, Казахстан;
ТОО «Продукции Казтрансгаза», Шымкент, Казахстан.

АНАЛИЗ СОСТОЯНИЯ МЕТОДА МАГНИТОТЕЛЛУРИЧЕСКОГО ЗОНДИРОВАНИЯ

Аннотация: 1. Впервые публикуется критический анализ состояния геофизического метода геологии по магнитотеллурическому зондированию, за период более чем 60-летней истории его существования.

2. В статье публикуются ранее не высказанные аналитические заключения. В результате анализа понятий, таких как скин-эффект, квазистационарное приближение, импеданс, ток смещения, ток проводимости, применённые к космическим вариациям магнитных возмущений как основы метода, сделаны выводы о том, что они для цели геологической разведки использованы неправомерно.

Ключевые слова: недра земли, геофизика, электрометрия, скин-эффект, импеданс, квазистационарное приближение, ток смещения, ток проводимости.

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 1, Number 317 (2018), 63 – 74

UDC 539.2/.6

K.B.Jakupov

Institute of mathematics and mathematical modeling, Almaty, Kazakhstan.

Kazak National University named after Al-Farabi

E-mail: jakupovKB@mail.ru**NONLINEAR HOOKE LAW IN THE THEORY OF ELASTICITY
OF INHOMOGENEOUS AND ANISOTROPIC BODIES**

Abstract. Directly from the physical connection with the nonlinear Hooke law, the components of the stress tensor of a rigid deformable body and new nonlinear equations of the theory of elasticity with an asymmetric stress tensor are derived, as a special case we obtain equations with the linear Hooke's law. The Lamé hypothesis and Lamé's equations do not have a physical connection with Hooke's law, this is their falsehood. Lamé took as a basis the approximate formula of the incomplete differential and suggested in his hypothesis the proportionality of the stress tensor components to the symmetrical half of the given incomplete differential of displacement, and the antisymmetric half of the differential is discarded, which is the result of the false symmetry of the Lamé stress tensor. The new nonlinear equations are approximated by an explicit scheme, with the use of which the elastic state of a flat bar is numerically calculated with the normal and tangential stresses acting on the upper face. The same scheme is applied to the Lamé equations. The obtained patterns of displacements distribution clearly demonstrate the difference in the solutions of the comparable systems of elasticity equations, as well as the discrepancy between the solution of the Lamé equations for a given state of the deformed body. The falsity of Lamé's equations is confirmed theoretically and physically.

Keywords: tensile, tangent, normal, stress, tensor.

1. Tangential stresses according to the generalized Hooke's law

Hooke's law is an assertion according to which the deformation arising

in an elastic body, is proportional to the applied force. It was discovered in 1660 by the English scientist Robert Hooke.

It should be kept in mind that Hooke's law is satisfied only for small deformations. If the proportionality limit is exceeded, the relationship between stresses and strains becomes nonlinear. For many media, Hooke's law does not apply even for small deformations. The derivation of dynamic equations with an asymmetric stress tensor according to Hooke's linear law is given in [1]: $\mathbf{F} = k\mathbf{u}$, $k > 0$, $\mathbf{F}_x = u\mathbf{i}$, $\mathbf{F}_y = v\mathbf{j}$, $\mathbf{F}_z = w\mathbf{k}$, $\mathbf{u} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k}$ – vector of displacement, where $\mathbf{F} = \mathbf{F}_x + \mathbf{F}_y + \mathbf{F}_z$ – external force that causes displacement.

In inhomogeneous media composed of bodies with various elastic properties or in anisotropic bodies whose properties depend on direction, Hooke's law can be nonlinear

$$\mathbf{F} = k_u u^{m_u} \mathbf{i} + k_v v^{m_v} \mathbf{j} + k_w w^{m_w} \mathbf{k}, \quad k_u > 0, k_v > 0, k_w > 0 \quad (1.1)$$

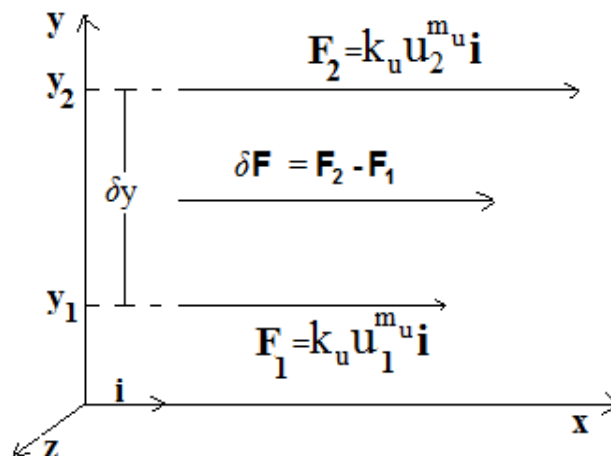
For exponents of 1 and $k_u = k_v = k_w = k$, (1.1) becomes Hooke's linear law for an isotropic medium, hence the exponents must be odd numbers [2], which will be confirmed below by the properties of hyperbolic equations of equilibrium. Suppose that on the plane y_1 force is associated with the movement

under the generalized law $\mathbf{F}_1 = k_u u_1^{m_u} \mathbf{i}$, similarly force $\mathbf{F}_2 = k_u u_2^{m_u} \mathbf{i}$ on the surface $y_2 = y_1 + \delta y$, $\delta y > 0$.

The increments of forces and displacements between layers are equal:

$$\delta \mathbf{F} = \mathbf{F}_2 - \mathbf{F}_1 = k_u u_2^{m_u} \mathbf{i} - k_u u_1^{m_u} \mathbf{i} = k_u \delta u^{m_u} \mathbf{i}, \quad \delta u^{m_u} = u_2^{m_u} - u_1^{m_u} > 0.$$

Let $|\mathbf{F}_2| > |\mathbf{F}_1|$, in this case the force increment is directed along the x axis: $\delta \mathbf{F} \uparrow \uparrow \mathbf{i}$.



Linear density is introduced $\mathbf{f} = \delta \mathbf{F} / \delta y$, $\delta \mathbf{F} = \delta y \mathbf{f}$. By definition, the average tangent stress vector $\mathbf{p}_{yxav} = \frac{\delta \mathbf{F}}{\delta x \delta z}$ parallel and equally directed with a force that causes this voltage $\mathbf{p}_{yxav} \uparrow \uparrow \delta \mathbf{F}$,

$$\mathbf{p}_{yxav} \uparrow \uparrow \mathbf{f}.$$

By the introduction of the proportionality coefficient, the following bonds are formed:

$$\mathbf{f} = k' \mathbf{p}_{yxav}, \quad k' > 0, \quad \delta y \mathbf{f} = k' \mathbf{p}_{yxav} \delta y, \quad \mathbf{p}_{yxav} \uparrow \uparrow \mathbf{i},$$

$$k' \mathbf{p}_{yxav} \delta y = k_u \delta u^{m_u} \mathbf{i}$$

This expression is multiplied scalar by the unit vector \mathbf{i} :

$$(k' \mathbf{p}_{yxav} \delta y, \mathbf{i}) = (k_u \delta u^{m_u} \mathbf{i}, \mathbf{i})$$

As result

$$(k' \mathbf{p}_{yxav} \delta y, \mathbf{i}) = k' |\mathbf{p}_{yxav}| \delta y |\mathbf{i}| \cos 0^\circ = k' \mathbf{p}_{yxav} \delta y, \quad (k_u \delta u^{m_u} \mathbf{i}, \mathbf{i}) = k_u \delta u^{m_u}$$

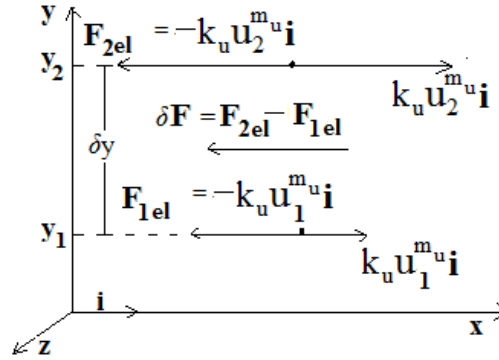
Equalities $k' \mathbf{p}_{yxav} \delta y = k_u \delta u^{m_u}$, $\mathbf{p}_{yxav} = \frac{k_u}{k'} \frac{\delta u^{m_u}}{\delta y}$ in the limit give a tangential stress

$$\mathbf{p}_{yx} = \lim_{\delta y \rightarrow 0} \frac{k_u}{k'} \frac{\delta u^{m_u}}{\delta y} = \mu_u \frac{\partial u^{m_u}}{\partial y}, \quad \mu_u = \frac{k_u}{k'} > 0$$

Tangential stresses in other directions are obtained analogously:

$$\mathbf{p}_{xy} = \mu_v \frac{\partial v^{m_v}}{\partial x}, \quad \mathbf{p}_{zx} = \mu_u \frac{\partial u^{m_u}}{\partial z}, \quad \mathbf{p}_{xz} = \mu_w \frac{\partial w^{m_w}}{\partial x}, \quad \mathbf{p}_{yz} = \mu_w \frac{\partial w^{m_w}}{\partial y}, \quad \mathbf{p}_{zy} = \mu_v \frac{\partial v^{m_v}}{\partial z}$$

The asymmetric shearing stress formulas are derived for causing stretching of the body of an external force $\mathbf{F} = \mathbf{F}_x + \mathbf{F}_y + \mathbf{F}_z$.



The elastic force in the deformed body according to Newton's third law is equal to the external force with a minus sign $\mathbf{F}_{el} = -\mathbf{F}$. Consequently, the linear Hooke law for elastic forces will have the form $\mathbf{F}_{el} = -k_u \mathbf{u}$, $\mathbf{F}_{el} = -k_u i - k_v j - k_w k$. A similar representation for Hooke's nonlinear law

$$\mathbf{F}_{el} = -k_u u^{m_u} \mathbf{i} - k_v v^{m_v} \mathbf{j} - k_w w^{m_w} \mathbf{k}$$

Suppose that on the plane y_1 the force is connected with the displacement along the nonlinear law $\mathbf{F}_{1el} = k_u u_1^{m_u} \mathbf{i}$, similarly acts force $\mathbf{F}_{2el} = k_u u_2^{m_u} \mathbf{i}$ on surface $y_2 = y_1 + \delta y$, $\delta y > 0$.

The increments of forces and displacements between layers are equal:

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{F} = \mathbf{F}_{2el} - \mathbf{F}_{1el} &= -k_u u_2^{m_u} \mathbf{i} + k_u u_1^{m_u} \mathbf{i} = -k_u \delta u^{m_u} \mathbf{i}, \\ \delta u^{m_u} &= u_2^{m_u} - u_1^{m_u} > 0. \end{aligned}$$

Let $|\mathbf{F}_2| > |\mathbf{F}_1|$, in this case, the force increment is directed against the x axis: $\delta \mathbf{F} \uparrow \downarrow \mathbf{i}$. Linear density is introduced $\mathbf{f} = \delta \mathbf{F} / \delta y$, $\delta \mathbf{F} = \delta y \mathbf{f}$.

By definition, the average tangential stress vector $\mathbf{p}_{yxav} = \frac{\delta \mathbf{F}}{\delta \sigma}$, $\delta \sigma = \delta x \delta z$ parallel and equally

directed with a force that causes this voltage $\mathbf{p}_{yxav} \uparrow \uparrow \delta \mathbf{F}$, $\mathbf{p}_{yxav} \uparrow \uparrow \mathbf{f}$.

The input of the proportionality coefficient formed a bond:

$$\mathbf{f} = k' \mathbf{p}_{yxav}, k' > 0, \delta y \mathbf{f} = k' \mathbf{p}_{yxav} \delta y, \mathbf{p}_{yxav} \uparrow \downarrow \mathbf{i}, k' \mathbf{p}_{yxav} \delta y = -k_u \delta u^{m_u} \mathbf{i}$$

This expression is multiplied scalar by the unit vector \mathbf{i} :

$$(k' \mathbf{p}_{yxav} \delta y, \mathbf{i}) = -(k_u \delta u^{m_u} \mathbf{i}, \mathbf{i})$$

As a result

$$(k' \mathbf{p}_{yxav} \delta y, \mathbf{i}) = k' |\mathbf{p}_{yxav}| \delta y |\mathbf{i}| \cos 180^\circ = -k' p_{yxav} \delta y, -(k_u \delta u^{m_u} \mathbf{i}, \mathbf{i}) = -k_u \delta u^{m_u}$$

Equalities

$$k' p_{yxav} \delta y = k_u \delta u^{m_u}, p_{yxav} = \frac{k_u \delta u^{m_u}}{k' \delta y}$$

in the limit give a tangential stress

$$p_{yx} = \lim_{\delta y \rightarrow 0} \frac{k_u \delta u^{m_u}}{k' \delta y} = \mu_u \frac{\partial u^{m_u}}{\partial y}, \mu_u = \frac{k_u}{k'} > 0$$

Similarly, tangential stresses are obtained in other directions:

$$p_{xy} = \mu_v \frac{\partial v^{m_v}}{\partial x}, p_{zx} = \mu_u \frac{\partial u^{m_u}}{\partial z}, p_{xz} = \mu_w \frac{\partial w^{m_w}}{\partial x}, p_{yz} = \mu_w \frac{\partial w^{m_w}}{\partial y}, p_{zy} = \mu_v \frac{\partial v^{m_v}}{\partial z}$$

In this way, the stress formulas for external forces coincide with formulas of the action of elastic forces, therefore further conclusions are made only for external forces.

2. Relation of Normal Stresses to Hooke's Law

A similar argument establishes the formula of the component \mathbf{p}_{xx}^0 normal voltage $\mathbf{p}_{xx} = \lambda \operatorname{div} \mathbf{u} \mathbf{i} + \mathbf{p}_{xx}^0$.

Let the external forces be equal: $\mathbf{F}_1 = k_u u_1^{m_u} \mathbf{i}$ on surface X_1 and $\mathbf{F}_2 = k_u u_2^{m_u} \mathbf{i}$ on surface $X_2 = X_1 + \delta X, \delta X > 0$.

The increments of forces and displacements between layers are equal:

$$\delta \mathbf{F} = \mathbf{F}_2 - \mathbf{F}_1 = k_u u_2^{m_u} \mathbf{i} - k_u u_1^{m_u} \mathbf{i} = k_u \delta u^{m_u} \mathbf{i}, \delta u^{m_u} = u_2^{m_u} - u_1^{m_u} > 0.$$

By definition, the average stress vector $\mathbf{p}_{xxav}^0 = \frac{\delta \mathbf{F}}{\delta \sigma}$, $\delta \sigma = \delta y \delta z$ parallel and equally directed with a force that causes this voltage $\delta \mathbf{F} \uparrow \uparrow \mathbf{i}$, $|\mathbf{F}_2| > |\mathbf{F}_1|$.

Through the linear density $\mathbf{f} = \frac{\delta \mathbf{F}}{\delta x}$, $\delta \mathbf{F} = \delta x \mathbf{f}$, $\mathbf{f} = k'' \mathbf{p}_{xxav}^0$ equalities $\delta \mathbf{F} = k'' \delta x \mathbf{p}_{xxav}^0$, $k'' \delta x \mathbf{p}_{xxav}^0 = k_u \delta u^{m_u} \mathbf{i}$.

This expression is multiplied scalar by the unit vector \mathbf{i} :

$$(k'' \delta x \mathbf{p}_{xxav}^0, \mathbf{i}) = (k_u \delta u^{m_u} \mathbf{i}, \mathbf{i})$$

Vectors are parallel in structure $\mathbf{p}_{xxcp}^0 \uparrow \uparrow \mathbf{i}$.

Therefore, they occur in scalar products

$$(k'' \delta x \mathbf{p}_{xxav}^0, \mathbf{i}) = k'' \delta x |\mathbf{p}_{xxav}^0| \cdot |\mathbf{i}| \cdot \cos 0^\circ = k'' \delta x p_{xxav}^0, (k_u \delta u^{m_u} \mathbf{i}, \mathbf{i}) = k_u \delta u^{m_u}.$$

The result is $k'' \delta x p_{xxav}^0 = k_u \delta u^{m_u}$, whence $p_{xxav}^0 = \frac{k_u}{k''} \frac{\delta u^{m_u}}{\delta x}$.

In the limit, the formula for the component of the normal stress

$$p_{xx}^0 = \lim_{\delta x \rightarrow 0} \frac{k_u}{k''} \frac{\delta u^{m_u}}{\delta x} = \mu_u \frac{\partial u^{m_u}}{\partial x}, \mu_u = \frac{k_u}{k''}.$$

The same reasonings also show the components of normal stresses in other directions:

$$p_{ii}^0 = \mu_i \frac{\partial u_i^{m_i}}{\partial x_i}, \mu_i = \frac{k_i}{k''}, i=1,2,3; u_1 \equiv u, u_2 \equiv v, u_3 \equiv w, x_1 \equiv x, x_2 \equiv y, x_3 \equiv z.$$

The same formulas for normal stresses are obtained for the elastic forces in a solid deformed body $\mathbf{F}_{\text{уп}} = -\mathbf{F}$.

Thus, the nonlinear Hooke law corresponds to an asymmetric stress tensor in a solid deformed body:

$$p_{ji} = \delta_{ji} \lambda \operatorname{div} \mathbf{u} + \mu_i \varepsilon_{ji}, \quad \varepsilon_{ji} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (2.1)$$

$\mathbf{u} = u_1 \mathbf{i} + u_2 \mathbf{j} + u_3 \mathbf{k}$ - the vector of displacement. In normal stresses $\lambda \delta_{ji} \operatorname{div} \mathbf{u}$ by Lama is preserved, δ_{ji} - the Kronecker symbol.

3. On falsifications and inapplicability of Lamé's equations in the nonlinear theory of elasticity of anisotropic bodies

Linear equations of the theory of elasticity of a solid deformable body

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \rho_0 \mathbf{F} + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} + \mu \Delta \mathbf{u} \quad (3.1)$$

constructed according to the hypothesis of Lamé on the symmetry of the stress tensor

$$p_{ji} = \lambda \delta_{ji} \operatorname{div} \mathbf{u} + 2\mu \varepsilon_{ji}, \quad \varepsilon_{ji} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad p_{ji} = p_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (3.2)$$

λ, μ - the Lamé coefficients.

The Lamé hypothesis is that the elements of the strain tensor ε should be equal to the doubled symmetric strain rate tensor, that is, doubled the first half of the artificial formula

$$du_i = \sum_{j=1}^3 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] dx_j, \quad i = 1, 2, 3, \quad (3.3)$$

(the second antisymmetric half of (3.3) is ignored [3-11]).

The formula (3.3) is formed from the incomplete differential of displacements

$$\tilde{d}u_i = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j, \quad i = 1, 2, 3, \quad (3.4)$$

(Here is the total differential: $d\mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} dt + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_j} dx_j = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} dt + \tilde{d}\mathbf{u}$).

Thus, in [3-12] the Lamé stress tensor (3.2) does not correspond and does not follow from Hooke's law. Obviously, already by construction, it is not suitable in anisotropic media, especially in the nonlinear Hooke's law.

The above physical method of the author of constructing the stress tensor of an elastic body according to Hooke's law is the opposite of the Lamé hypothesis and exactly follows the definition given by Timoshchenko in [3]: **"The main task of the theory of elasticity is to find, according to the external forces acting on the solid body, those changes in shape that the body undergoes, and those internal elastic forces that, with these changes of form, arise between parts of the body."**

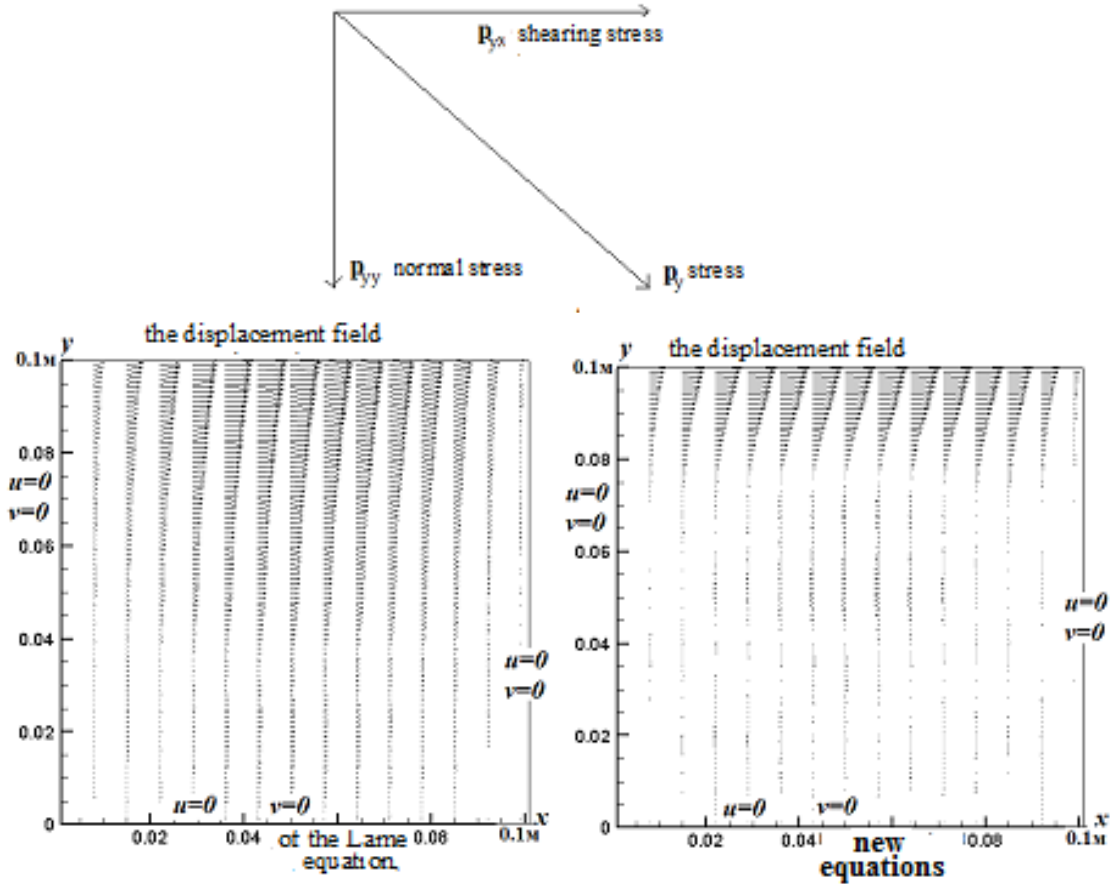


Figure 1

Figure 2

To compare Lamé's equations (3.1) with new equations with asymmetric-a tensor of stresses in an isotropic body $\mu_u = \mu_v = \mu_w = \mu$:

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \rho_0 \mathbf{F} + \lambda \text{grad div} \mathbf{u} + \mu \Delta \mathbf{u} \quad (3.5)$$

displacements in a square deformable bar measuring 0.1 m by 0.1 m have been calculated.

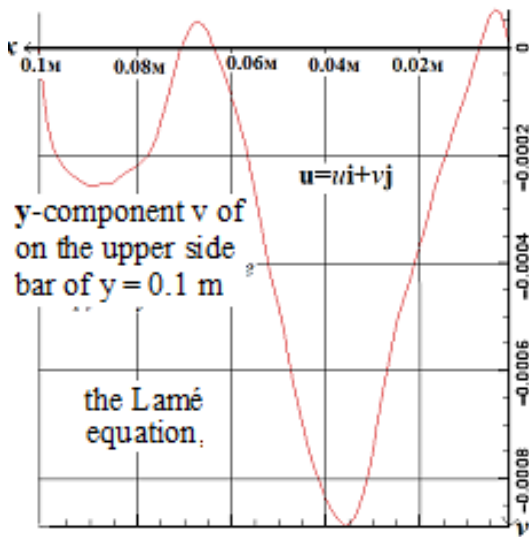


Figure 3

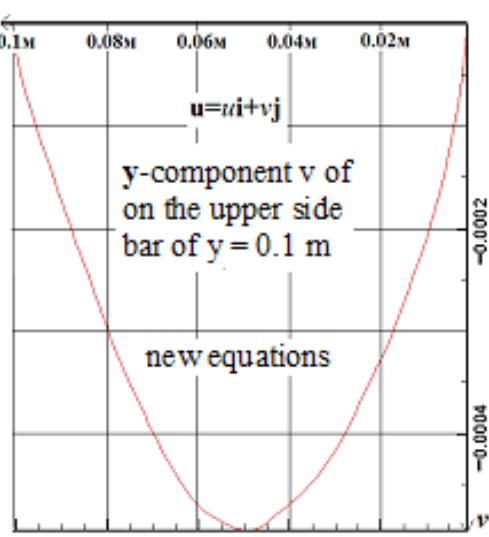


Figure 4

The vector of external force $\mathbf{p}_y = \mathbf{p}_{yx} + \mathbf{p}_{yy} = p_{yx}\mathbf{i} + p_{yy}\mathbf{j}$ is directed at an angle to the upper plane of the bar. In Fig. 1 and 2 there are the fields of displacement vectors $\mathbf{u} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j}$, in Fig. 3 and 4 transverse velocity diagrams on the upper side of the bar, all at time $t = 121.38$ s. Body density $\rho_0 = 7800 \text{ кг/м}^3$. Specifically laid $p_{yy} = -1 \text{ Н/м}^2$, $p_{yx} = 10 \text{ Н/м}^2$. The other edges of the bar are rigidly fixed, the displacements on them are equal to zero. The Lamé coefficients are chosen equal to $\lambda = 1 \text{ кг/(с}^2\text{м)}$, $\mu = 100 \text{ кг/(с}^2\text{м)}$. The two-dimensional Lamé equations (3.1) and the new equations (3.5) are realized by explicit schemes [2] on a 100×100 grid with a time step equal to 0.0005 s. A clear difference between the numerical solutions, especially the vertical displacements on the upper side of the bar in Fig. 3 and 4.

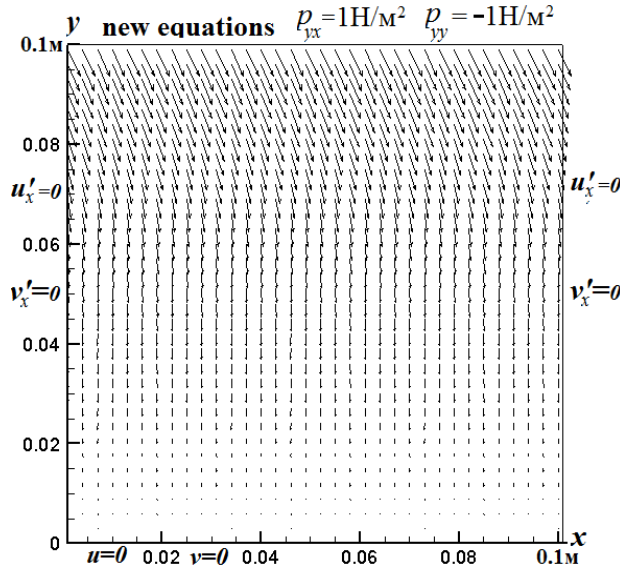


Figura 5

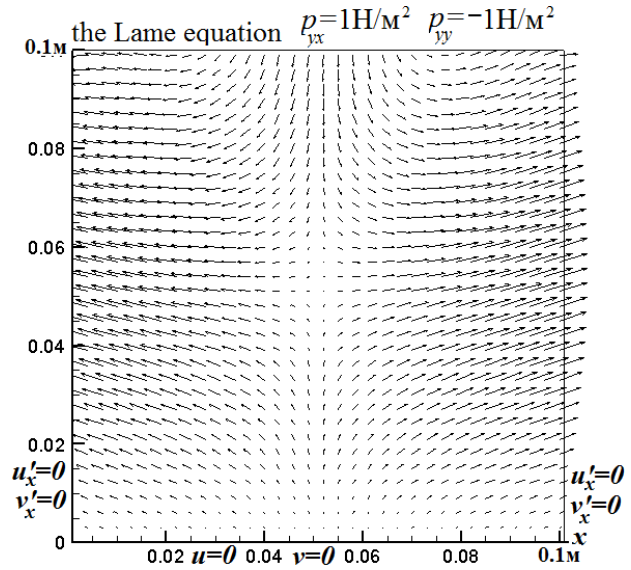


Figura 6

In Fig. 4, the movement of particles of the upper side of the bar $y = 0.1$ m occurs downward, which is confirmed by negative values of the transverse displacement v with respect to the new equations. In Fig. 3, Lamé equations have positive values for the transverse component of the displacement, which contradicts the direction of the action of the external force.

In Fig. 5 the displacement field for the new equations; Fig. 6 the field of displacements by the Lamé equations. Stresses act on the entire upper side of the bar. The results of FIG. 1 ± 6 practically confirm the falsity of the Lamé equations with a symmetric stress tensor.

4. Equations of nonlinear anisotropic theory of elasticity according to the generalized Hooke's law with an asymmetric stress tensor

Leaving from Hooke's linear law [1], the elements of the strain tensor $\varepsilon_{ji} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$, $i, j = 1, 2, 3$ are directly equal to the coefficients of the incomplete differential (3.4).

The asymmetric stress tensor of the generalized Hooke's law

$$p_{ji} = \delta_{ji} \lambda \text{div} \mathbf{u} + \mu_i \varepsilon_{ji}, \quad \varepsilon_{ji} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \quad i, j = 1, 2, 3, \tag{4.1}$$

in the equations of the dynamics of a continuous medium in stresses

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \rho_0 F_i + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial p_{ji}}{\partial x_j}, \quad i = 1, 2, 3$$

form non-linear equations with exponents in accordance with the generalized Hooke's law

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}_i}{\partial t^2} = \rho_0 \mathbf{F}_i + \lambda \frac{\partial}{\partial x_i} \operatorname{div} \mathbf{u} + \mu_i \Delta \mathbf{u}_i^{m_i}, i=1,2,3 \quad (4.2)$$

5. Rationale for the oddness of entire exponents of degree

Equations (4.2) with Cartesian coordinates

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}_i}{\partial t^2} = \rho_0 \mathbf{F}_i + \lambda \frac{\partial}{\partial x_i} \operatorname{div} \mathbf{u} + \mu_i \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 \mathbf{u}_i^{m_i}}{\partial x_j^2}, i=1,2,3$$

are represented in a differentiated form

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}_i}{\partial t^2} = \rho_0 \mathbf{F}_i + \lambda \frac{\partial}{\partial x_i} \operatorname{div} \mathbf{u} + \mu_i \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \mathbf{u}_i^{m_i}}{\partial x_j} \right), i=1,2,3,$$

where $\frac{\partial \mathbf{u}_i^{m_i}}{\partial x_j} = m_i \mathbf{u}_i^{m_i-1} \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial x_j}$.

Obviously, the equivalent equations

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}_i}{\partial t^2} = \rho_0 \mathbf{F}_i + \lambda \frac{\partial}{\partial x_i} \operatorname{div} \mathbf{u} + \mu_i \frac{\partial}{\partial x_j} \left(m_i \mathbf{u}_i^{m_i-1} \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial x_j} \right), i=1,2,3 \quad (5.1)$$

are equations of hyperbolic type only for odd exponents of degree $m_i = 1; 3; 5; 7; 9$ и $m.d.$, $m_1 \equiv m_u, m_2 \equiv m_v, m_3 \equiv m_w$ for always $m_i \mathbf{u}_i^{m_i-1} \geq 0$.

6. Explicit diagram of the equations of an anisotropic nonlinear theory of elasticity

The Cauchy-Dirichlet problem for the new equations

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} &= \rho_0 \mathbf{F}_x + \lambda \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x} + \mu_u \Delta \mathbf{u}^{m_u}, \\ \rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t^2} &= \rho_0 \mathbf{F}_y + \lambda \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial y} + \mu_v \Delta \mathbf{v}^{m_v}, \\ \rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial t^2} &= \rho_0 \mathbf{F}_z + \lambda \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial z} + \mu_w \Delta \mathbf{w}^{m_w}, \\ \mathbf{p} &= \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial z} \end{aligned}$$

with the initial conditions:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}|_{t=0} &= \mathbf{d}_u(\mathbf{r}), \mathbf{v}|_{t=0} = \mathbf{d}_v(\mathbf{r}), \mathbf{w}|_{t=0} = \mathbf{d}_w(\mathbf{r}), \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}|_{t=0} &= \mathbf{d}_{uu}(\mathbf{r}), \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}|_{t=0} = \mathbf{d}_{vv}(\mathbf{r}), \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t}|_{t=0} = \mathbf{d}_{ww}(\mathbf{r}) \end{aligned}$$

and boundary conditions on the boundary S :

$$\mathbf{u}|_S = \mathbf{q}_u(\mathbf{r}), \mathbf{v}|_S = \mathbf{q}_v(\mathbf{r}), \mathbf{w}|_S = \mathbf{q}_w(\mathbf{r}),$$

In the integration region, a uniform grid is defined $\overline{\Omega}_h = \{x_i = ih_x, y_j = jh_y, z_k = kh_z, 0 \leq i \leq N_x, 0 \leq j \leq N_y, 0 \leq k \leq N_z\}$, and a time grid $\overline{\Omega}_\tau = \{t_n = n\tau, n = 0, 1, \dots, N_\tau\}$.

Notation of grid functions: $f_{ijk}^n \equiv f(x_i, y_j, z_k, t_n)$.

Initial conditions are specified in internal nodes: $u_{ijk}^0 = d_{uijk}, v_{ijk}^0 = d_{vijk}, w_{ijk}^0 = d_{wijk},$

$$u_{ijk}^1 = d_{uijk} + \tau d_{uuijk}, v_{ijk}^1 = d_{vijk} + \tau d_{vvijk}, w_{ijk}^1 = d_{wijk} + \tau d_{wwijk},$$

$$1 \leq i \leq N_x - 1, 1 \leq j \leq N_y - 1, 1 \leq k \leq N_z - 1$$

Explicit difference scheme:

$$Q_{uijk}^n = \mu_u \left[\frac{(u_{i-1jk}^n)^{m_u} - 2(u_{ijk}^n)^{m_u} + (u_{i+1jk}^n)^{m_u}}{h_x^2} + \frac{(u_{ij-1k}^n)^{m_u} - 2(u_{ijk}^n)^{m_u} + (u_{ij+1k}^n)^{m_u}}{h_y^2} + \right. \\ \left. + \frac{(u_{ijk-1}^n)^{m_u} - 2(u_{ijk}^n)^{m_u} + (u_{ijk+1}^n)^{m_u}}{h_z^2} + \rho_0 F_{xijk} \right],$$

$$Q_{vijk}^n = \mu_v \left[\frac{(v_{i-1jk}^n)^{m_v} - 2(v_{ijk}^n)^{m_v} + (v_{i+1jk}^n)^{m_v}}{h_x^2} + \frac{(v_{ij-1k}^n)^{m_v} - 2(v_{ijk}^n)^{m_v} + (v_{ij+1k}^n)^{m_v}}{h_y^2} + \right. \\ \left. + \frac{(v_{ijk-1}^n)^{m_v} - 2(v_{ijk}^n)^{m_v} + (v_{ijk+1}^n)^{m_v}}{h_z^2} + \rho_0 F_{yijk} \right],$$

$$Q_{wijk}^n = \mu_w \left[\frac{(w_{i-1jk}^n)^{m_w} - 2(w_{ijk}^n)^{m_w} + (w_{i+1jk}^n)^{m_w}}{h_x^2} + \frac{(w_{ij-1k}^n)^{m_w} - 2(w_{ijk}^n)^{m_w} + (w_{ij+1k}^n)^{m_w}}{h_y^2} + \right. \\ \left. + \frac{(w_{ijk-1}^n)^{m_w} - 2(w_{ijk}^n)^{m_w} + (w_{ijk+1}^n)^{m_w}}{h_z^2} + \rho_0 F_{zijk} \right],$$

$$\rho_0 \frac{u_{ijk}^{n+1} - 2u_{ijk}^n + u_{ijk}^{n-1}}{\tau^2} = Q_{uijk}^n + \lambda \left(\frac{u_{i-1jk}^n - 2u_{ijk}^n + u_{i+1jk}^n}{h_x^2} + \right. \\ \left. + \frac{v_{i+1j+1k}^n - v_{i+1j-1k}^n - v_{i-1j+1k}^n + v_{i-1j-1k}^n}{4h_x h_y} + \frac{w_{i+1jk+1}^n - w_{i+1jk-1}^n - w_{i-1jk+1}^n + w_{i-1jk-1}^n}{4h_x h_z} \right),$$

$$\rho_0 \frac{v_{ijk}^{n+1} - 2v_{ijk}^n + v_{ijk}^{n-1}}{\tau^2} = Q_{vijk}^n + \lambda \left(\frac{v_{ij-1k}^n - 2v_{ijk}^n + v_{ij+1k}^n}{h_y^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{u_{i+1j+1k}^n - u_{i+1j-1k}^n - u_{i-1j+1k}^n + u_{i-1j-1k}^n}{4h_x h_y} + \frac{w_{ij+1k+1}^n - w_{ij+1k-1}^n - w_{ij-1k+1}^n + w_{ij-1k-1}^n}{4h_z h_y} \right),$$

$$\rho_0 \frac{w_{ijk}^{n+1} - 2w_{ijk}^n + w_{ijk}^{n-1}}{\tau^2} = Q_{wijk}^n + \lambda \left(\frac{w_{ijk-1}^n - 2w_{ijk}^n + w_{ijk+1}^n}{h_z^2} + \right.$$

$$+ \frac{u_{i+1,j,k+1}^n - u_{i+1,j,k-1}^n - u_{i-1,j,k+1}^n + u_{i-1,j,k-1}^n}{4h_x h_z} + \frac{v_{ij+1,k+1}^n - v_{ij+1,k-1}^n - v_{ij-1,k+1}^n + v_{ij-1,k-1}^n}{4h_z h_y}$$

$$i=1, \dots, N_x - 1, j=1, \dots, N_y - 1, k=1, \dots, N_z - 1$$

This scheme has a second-order error in all variables $O(\tau^2) + O(h_x^2) + O(h_y^2) + O(h_z^2)$. The stability of the scheme is ensured by the fulfillment of Courant's condition:

$$\frac{\tau^2 \mu}{h_x^2 + h_y^2 + h_z^2} \leq 1$$

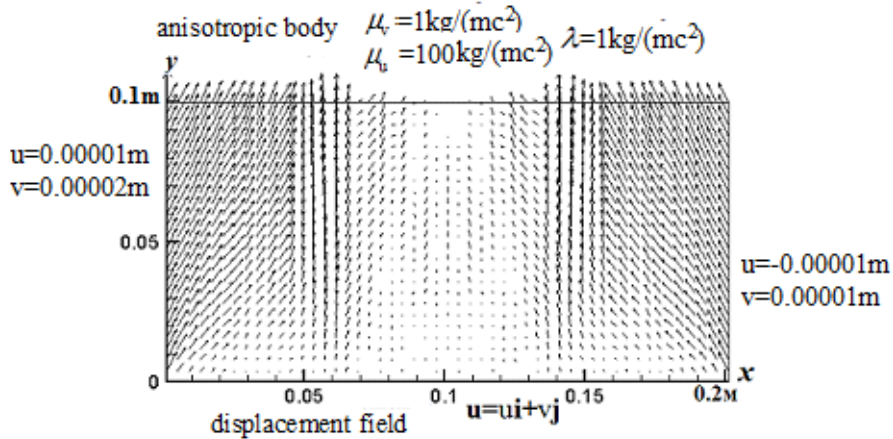


Figure 7- The field of displacements $\mathbf{u} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j}$ in an anisotropic body

Fig. 7 shows the displacement field according to Hooke's linear law $m_u = 1, m_v = 1$ in an anisotropic body, in Fig. 8 in an isotropic body.

On the upper plane of the bar, the Neumann boundary condition $\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \frac{\partial v}{\partial y} = 0$.

Obviously, the difference in the coefficients leads to different displacement fields, hence to different fields of internal stresses.

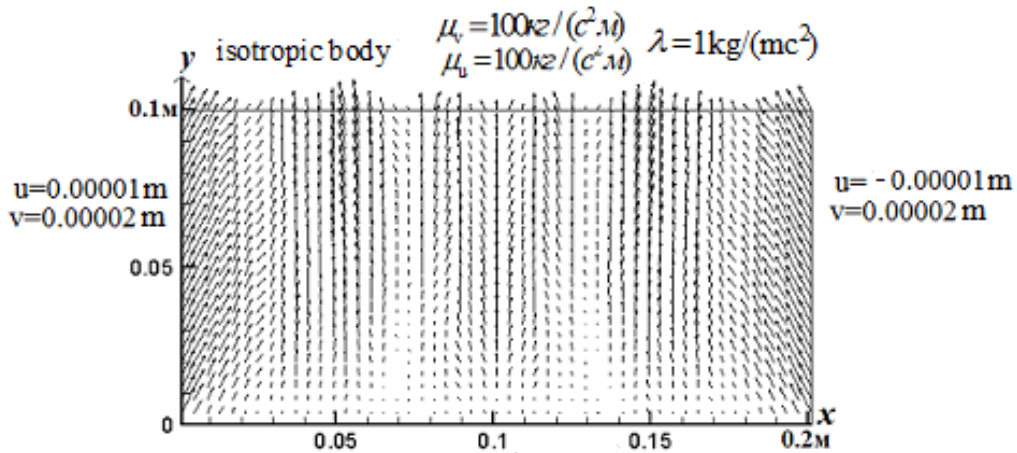


Figure 8 - The field of displacements in an isotropic body

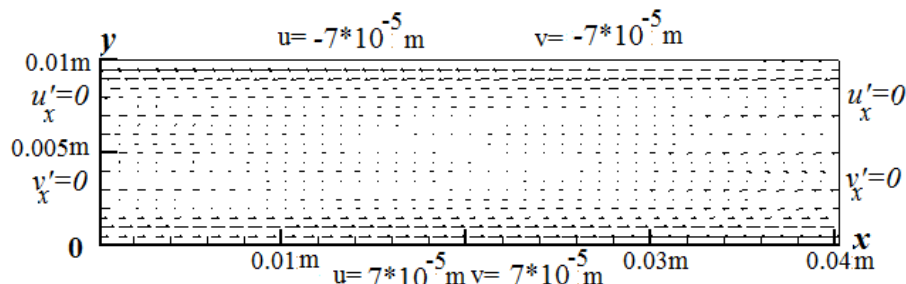


Figura 9 - Displacement field $\mathbf{u} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j}$
by a nonlinear Hooke law of degree 3

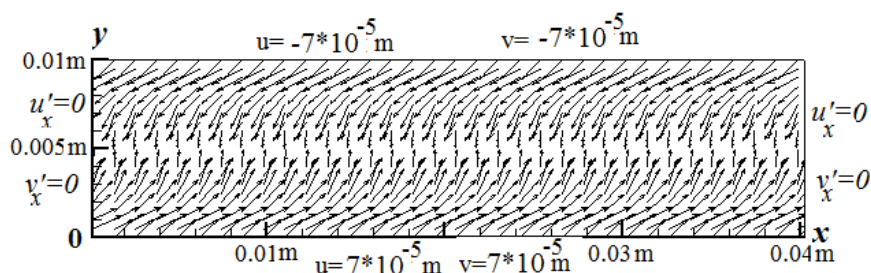


Figura 10 - Displacement field by a linear Hooke law

Fig. 9 shows the displacement field in an anisotropic body by Hooke's non-linear power law $m_u = 3, m_v = 3$. On the horizontal sides of the bar are given the Neumann boundary conditions are put on the lateral sides

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

Lame coefficients in an anisotropic bar:

$$\lambda = 104.4 \text{ kg} / (\text{c}^2 \text{ m}), \mu_u = 80 \text{ kg} / (\text{c}^2 \text{ m}), \mu_v = 40 \text{ kg} / (\text{c}^2 \text{ m})$$

In Fig. 10 shows the displacement field in an anisotropic body according to Hooke's linear law $m_u = 1, m_v = 1$.

CONCLUSIONS

The physical conclusions of the normal and tangential stresses prove the asymmetry of the stress tensor in a solid deformed body both for the isotropic Hooke's law and for an anisotropic, including nonlinear one. Concrete examples of numerical calculations of the state of an elastic body show the inadequacy and inconsistency of the hypothesis of the symmetry of the stress tensor of a continuous medium and, accordingly, of the equations of the Lamé elasticity theory.

The asymmetry of the stress tensor opens up wide possibilities for the modeling of displacements in a solid deformed body, which is shown by the application of Hooke's law in the anisotropic body of Fig. 7 and Hooke's nonlinear law of Fig. 9.

REFERENCES

[1] Jakupov K.B. Modeling according to Hooke's law in the theory of elasticity. The asymmetry of the stress tensor // Izvestiya NAS RK, Series of Physics and Mathematics, 6 (310), November - December 2016 p. 96-103. ISSN 2518-1726 (Online), ISSN 1991-346X (Print).

[2] Jakupov K.B. Elimination of falsifications and modernization of the foundations of mechanics. Continuous environment - Almaty: Publishing house "The White Orders", 2017. C.435. ISBN 978-601-280-859-9.

[3] Timoshenko S.P. Theory of elasticity. Moscow: Nauka, 1979. 851c.

- [4] Mays J. Theory and Problems of Continuum Mechanics. Moscow: Mir, 1974. 318s.
[5] Sedov L.I. Continuum mechanics, vol. 1. M.: "Science", 1973. 315s.
[6] Lurie A.I. Theory of elasticity. M.: "Science", 1970. 984s.
[7] Ilyushin A.A. Mechanics of a continuous medium. Moscow: Izd-vo MGU, 1978. 287c.
[8] Ilyushin A.A., Pobedrya B.E. Fundamentals of the mathematical theory of thermobond-elasticity. M.: "Science", 1970. 547c.
[9] Ilyushin A.A., Lenski V.S. Strength of Materials. N.Y. Pergamon press, 1967.
[10] Eringen A.C. Mechanics of Continua. N.Y. Wiley, 1967.
[11] Novatsky V. Theory of Elasticity. Moscow: Mir, 1975.
[12] Lomakin V.A. Theory of elasticity of inhomogeneous bodies. Moscow: Moscow State University, 1976.
[13] Jakupov K.B. Hooke's law in the theory of elasticity of anisotropic bodies // Izvestiya NAS RK, series of Physics and Mathematics., 4 (424), July-August 2017 p. 241-252. ISSN 2518-1726 (Online), ISSN 1991-346X (Print)

К. Б. Жақып-тегі

ҚР БҒМ Математика және математикалық моделдеу институты, Алматы, Қазақстан
Әл-Фараби атындағы ҚазҰУ

СЫЗЫҚСЫЗ ГУКТЫҢ ЗАҢЫ БІРТЕКТЕС ЕМЕС ЖӘНЕ АНИЗОТРОПТЫҚ ДЕНЕЛЕРДІҢ СЕРПІЛІМДІК ТЕОРИЯСЫНДА

Аннотация. Тікелей сызықсыз Гук заңымен қатты майысқақ денелердің кернеулер тензорының компоненттері шығарылған. Ламенің екінші еселенуінің бағыттан тәуелділігі есептелген. Майысқақ қатты дененің серпілімдік теориясының кернеулер тензорының беттеспегендігі дәлелденген. Осыған сәйкес майысқақ қатты дененің сызықсыз серпілімдік теориясының теңдеулері жасалынған. Ламе гипотезасында толық емес жылжу дифференциалының беттескен жартысы қана пайдаланғаны көрсетілген, екінші антибеттескен жартысы лақтырылынған, соның салдарынан Ламе кернеулер тензорының беттескендігі шыққан. Жаңа теңдеулер үшін 2 ретті нақтылығы бар айқын схема жасалынған, соны пайдаланып жазық жолақтың серпілімдік күйі саналған, үстіңгі жақтауының ортасына жанама кернеулер және тік кернеулер әсер еткенде. Дәл сондай схема Ламе теңдеулеріне де қолдалынған. Саналған жылжулардың үлестірулік суреттері салыстырынып жатқан теңдеулердің айырмашылықтарын бейнелейді және Ламе теңдеулерінің майысқақ қатты дененің күйіне сәйкес еместігін көрсетеді. Ламе теңдеулерінің жалғандығы теориялық және физикалық тұрпатта бекітілген.

Тірек сөздер: анизотроптылық, созылу, кернеулер, тензор, теңдеулер.

УДК 539.2/.6

К.Б. Джакупов

Институт математики и математического моделирования МОН РК, Алматы, Казахстан
Казахский Национальный Университет им.Аль-Фараби

НЕЛИНЕЙНЫЙ ЗАКОН ГУКА В ТЕОРИИ УПРУГОСТИ НЕОДНОРОДНЫХ И АНИЗОТРОПНЫХ ТЕЛ

Аннотация. Непосредственно из физической связи с нелинейным законом Гука выводятся компоненты тензора напряжений твердого деформируемого тела и новые нелинейные уравнения теории упругости с несимметричным тензором напряжений, как частный случай получаются уравнения с линейным законом Гука. Гипотеза Ламе и уравнения Ламе не имеют физической связи с законом Гука, в этом заключается их фальшивость. Ламе взял за основу приближенную формулу неполного дифференциала и предположил в своей гипотезе пропорциональность компонент тензора напряжений симметричной половине данного неполного дифференциала смещения, причем антисимметричная половина дифференциала отбрасывается, следствием чего является фальшивая симметричность тензора напряжений Ламе. Новые нелинейные уравнения аппроксимируются явной схемой, с применением которой численно рассчитано упругое состояние плоского бруска при действующих на верхней грани нормальном и касательном напряжениях. Такая же схема применена для уравнений Ламе. Полученные картины распределения смещений наглядно демонстрируют различие решений сравниваемых систем уравнений упругости, а также несоответствие решения уравнений Ламе данному состоянию деформируемого тела. Теоретически и физически подтверждена фальшивость уравнений Ламе.

Ключевые слова: растяжение, касательное, нормальное, напряжения, тензор.

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 1, Number 317 (2018), 75 – 86

UDC 624.131 + 539.215

A.A. Yunusov³, A. Dasibekov², B.N. Korganbaev¹,
A.A. Yunusova⁴, Z.A. Abdieva³, N.A. Kospanbetova³

¹International Humanitarian-Technical University, e-mail Yunusov1951@mail.ru;

²South-Kazakhstan State University named after M. Auezov (160012, Shymkent, Tauke Khan ave. 5,
Republic of Kazakhstan), e-mail Yunusov1951@mail.ru;

³KEPUFP (160012, Shymkent, Tolebi-32 street), Republic of Kazakhstan;

⁴Eurasian humanitarian Institute (Actana. Republic Of Kazakhstan)

MULTIDIMENSIONAL PROBLEMS OF SOILS' CONSOLIDATION WITH MODULUS OF DEFORMATION, VARIABLE IN ITS DEPTH

Abstract. In unconsolidated condition, the tension applied to the soil is perceived both by a skeleton of soil and pore fluid. Wherein speaking about the one-dimensional case the pressure on the elementary area consists of the tension on the soil's skeleton and the pressure in the water. Sometimes the tension in the soil's skeleton is called effective, the pressure in the water is called neutral, and the unit pressure applied on the whole soil's surface is called total.

All problems in this article are directed to the definition of neutral pressure. Subsequent values are calculated easily. Consequently, it is necessary to find the pore fluid pressure. This pressure must be figured out in order to determine it.

The filtration theory of consolidation states that compression curve is taken as the main rheological equation of soil's condition, and phases' interaction is described by the equation of equilibrium, according to which the unit pressure, applied toward the soil is made up of an efficient and neutral pressure. And here the air movement obeys the law of Boyle-Mariotte, which explains the relationship between pressure and volume, and the gas, dissolved in water, obeys the law of Henry. This model allows us to simplify the mathematical formulation of the problem and makes it easier to determine the solution of soil consolidation problems.

The compaction of soil is mainly determined by its compressibility. Compressibility of the base depends on the soil type and the nature of the tension. The phenomenon of the soil's compressibility is very important in the design of engineering structures on a consolidated basis. Wherein this soil compression deformation occurs mainly due to the convergence of solid particles together and is evaluated by the change in porosity coefficient when the compressive pressures in the soil skeleton are changed. The determining of the relationship between porosity coefficient and compressive tensions in the soil skeleton is usually performed in the laboratory in compression devices.

Below we consider the process of compaction of heterogeneous saturated soil's layer which has capacity h , and which lies beneath a sandy pillow. At the initial time ($t = \tau_1$) the soil's layer immediately gets a distributed tension with the intensity $q(z, t)$. Then the mathematical formulation of this problem is as follows: it is required to determine the pressure in pore fluid $P(z, t)$, the tension in the soil skeleton $\sigma(z, t)$ and vertical movement of the upper surface $S(t)$ (the sediment) of the compacted soil base.

The paper also studies the flat compaction of soil, which is mainly determined by its compressibility. The spatial problems of the deformed solid's mechanics are also considered by the authors.

Key words: Evaluation, equation in integral form, the process, compaction, soil, rectangle, pressure, basis, foundation, boundary conditions.

During estimation of different kinds of soil consolidation, it is necessary to identify the nature of the change in time of constructions and bases' sediments. Preliminary it is needed to determine the dissipation of pore pressure arising upon application of tension to the soil and the amount of the main tensions

exerting on the soil skeleton; i.e. it is necessary to evaluate the bearing capacity of soil foundations, which are in an unstabilized condition.

We should mention that in unconsolidated condition the tension applied to the soil is perceived both by the soil's skeleton and pore fluid. Wherein speaking about the one-dimensional case the pressure on the elementary area consists of the tension on the soil's skeleton and the pressure in the water. Sometimes the tension in the soil's skeleton is called effective, the pressure in the water is called neutral, and the unit pressure applied on the whole soil's surface is called total.

Thus, the soil consolidation is determined not only by physic-mechanical properties, but also by the size of the compaction area as the dissipation speed of pore pressure depends on the length of filtration path.

In the calculations of consolidation it is necessary to identify the nature of the change in time of bases and constructions' sediments, which are determined by the gradual soil's compaction with decreasing pore pressure. Then, the resulting value of sediment is compared with the limit value, i.e., [11].

$$S_p \leq S_{np}$$

After that, it will be possible to talk about the strength of the entire construction's system - soil.

Currently, there are three main estimating models of consolidation theory, i.e. filtration consolidation theory, the theory of body forces and osmotic theory, which are used in the mechanics of elastic and elastic creeping soils' compaction, depending on the used species of the equation of condition, describing the relationship between the tensions in the soil skeleton and its deformation, and description of the nature of the phases' interaction.

The compression curve is taken as the main rheological equation of soil condition in the filtration consolidation theory, and the phase equilibrium interaction is described by the equation, according to which the unit pressure applied to the soil is made up of an efficient and neutral pressure. And here the air movement obeys the law of Boyle-Mariotte, which explains the relationship between pressure and volume, and the gas, dissolved in water, obeys the law of Henry. This model allows us to simplify the mathematical formulation of the problem and makes it easier to determine the solution of soil consolidation problems. The filtration consolidation theory was formulated by K.Terzaghi and further developed in the works of Soviet scientists. This theory is sometimes fairly called the theory of Terzaghi-Gersevanov-Florin, because N.M.Gersevanov [6] and V.A. Florin [4] not only received partial solution of problems of this theory, but also could formulate a general statement for the two- and three-dimensional cases.

The compaction of soil is mainly determined by its compressibility. Compressibility of the base depends on the soil type and the nature of the tension. The phenomenon of the soil's compressibility is very important in the design of engineering structures on a consolidated basis. Wherein this soil compression deformation occurs mainly due to the convergence of solid particles together and is evaluated by the change in porosity coefficient when the compressive pressures in the soil skeleton σ are changed. The determining of the relationship between porosity coefficient and compressive tensions in the soil skeleton is usually performed in the laboratory in compression devices. In addition, the deformation properties of soils, in general, vary with the point's coordinates, and the assumption on their homogeneity is the idealization of the real conditions of earth massives' compaction. In this respect, theoretical and experimental researches of B.N. Barshevskiy [2], L.A. Galin [6], G.K. Klein [7] and other researchers have shown that the soil, on which constructions are built, is heterogeneous for its mechanical properties, and this soil's heterogeneity varies in depth according to the law:

$$E(z) = E_m z^m, \quad (1)$$

where E_m is a module of soil deformation at depth $z=1$; index m in most cases ranges in limits $0 < m < 2$ and is connected with a Poisson coefficient μ_0 , i.e.

$$\mu_0 (2 + m) = 1.$$

G.K. Klein [7] has worked out the method of calculation of beams lying on the soil base, the deformation modulus of which varies according to the law (1). He has derived the following formula for the determination of the half-space's surface's sediment:

$$W_m = \frac{P}{\pi_m D_m r^{m+1}},$$

where P – the concentrated force applied to the surface of the half-space; $D_m = \frac{E_m}{\alpha^*}$ – characteristics of heterogeneous half-space's rigidity; r – distance from the place of application of force P to the point of the half-point's surface, where the sediment is determined by:

$$\alpha = \frac{3+m}{2} \left(\frac{1}{1+m} - \mu_0 \right).$$

On the basis of these studies, in contrast to (1) herein in order to study the compaction process the soil deformation's module is the following

$$E = E_m (1 + \beta z)^m \quad (\alpha > 0, E_m > 0, \alpha + \beta z > 0), \quad (2)$$

where E_m, β, m are the parameters of an experience.

The parameters E_m, β, m , in (2), can be determined, if we know three values E_1, E_2, E_3 of deformation modulus for three different values z_1, z_2, z_3 .

One-dimensional problem. Below we consider the process of compaction of the heterogeneous saturated soil's layer, which has capacity h , and which lies beneath a sandy pillow. At the initial time ($t = \tau_1$) the soil's layer immediately gets a distributed tension with the intensity $q(z, t)$. Then the mathematical formulation of this problem is as follows: it is required to determine the pressure in pore fluid $P(z, t)$, the tension in the soil skeleton $\sigma(z, t)$ and vertical movement of the upper surface $S(t)$ (the sediment) of the compacted soil base. Wherein we assume: the possibility of the part of the tension for highly compressible saturated clay soils at the initial time, tension q , instantly applied to the soil, which is equal in magnitude of the structural strength of the compression $p_{ср}$, immediately perceived by soil skeleton. The soil is structurally heterogeneous, i.e. soil heterogeneity may be conditioned by continuous increase in its density, and therefore in rigidity by the depth under the influence of its own weight. This means that the properties of the soil are not constant, but vary depending on the position of coordinates. And the soil, deformation modulus of which increases continuously with depth, is called continually heterogeneous; the soil bases deform under the tension in a vertical direction; the earthen surroundings are water saturated, i.e. it consists of solid soil particles and fills its pores with water; the viscous nature of the clay soil deformation is not expressed clearly enough, so in some cases the skeleton creep phenomenon, simply can be ignored. Water filtering, extracted from the strongly compacted water saturated clay soil, passes according to the generalized Darcy's law.

Then the value of the pore pressure $p(z, t)$ at $t = \tau_1$ is equal to [1]

$$p|_{t=\tau_1} = q(z, t) - p_{ср} = q_0(z, t), \quad (3)$$

i.e. the part of the tension, which is equal to the value of the structural strength of the compression $p_{ср}$ is immediately accepted by the soil skeleton. The rate of change of porosity coefficient $\varepsilon(z, t)$ has the form

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\kappa}{\gamma_e} (1 + \varepsilon_{ср}) \frac{\partial^2 p}{\partial z^2}, \quad (4)$$

where $\varepsilon_{ср}$ - the average coefficient of porosity; κ - filtration coefficient, γ_e - volumetric weight of water;

If the soil is deformed only in the vertical direction, then according to the filtration consolidation theory, the amount of excess pore pressure $p(z, t)$ and the effective tension in the soil $\sigma(z, t)$ at any given time is equal to the external tension, i.e.

$$p + \sigma = q \quad (5)$$

In the linear soils' consolidation theory the compression dependence for heterogeneous soil has the following form

$$\varepsilon(z, t) = \varepsilon_0 - a(z)\sigma(z, t) \quad (6)$$

Here, the compressibility coefficient for heterogeneous compacted soil $a(z)$ depends on the coordinate z , i.e. the depth of the studied point's location of the compacted soil massif; ε_0 - initial rate of porosity.

Using (3) - (6), the equation (4) leads to the following form:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = C_{1v}(1+z)^m \frac{\partial^2 p}{\partial z^2}, \quad (7)$$

where

$$C_{1v} = \frac{k(1 + \varepsilon_{cp})}{\gamma_s a_0}.$$

Boundary conditions in laminar Darcy law will take the following form

$$p|_{z=0} = 0; \quad \left. \frac{\partial p}{\partial z} \right|_{z=h} = 0. \quad (8)$$

The second boundary condition applies to the depth h , the filtration does not occur below it. Thus, the solution of the studied problem reduces to the solution of differential equation (7) at the edge (3) and (8) conditions.

The solution (7) with the boundary conditions (8) is the following

$$p(z, t) = \sqrt{1 + \beta z} \sum_{i=0}^{\infty} C_i V_{\frac{1}{2-m}} \left[v_i (1 + \beta z)^{\frac{2-m}{2}} \right] e^{-C_{1v} \lambda_i^2 t}, \quad (9)$$

where $m \neq 2$;

$$C_i = \frac{\int_1^{1+\beta h} (q_0 + bz) z^{\frac{1-m}{2}} V_{\frac{1}{2-m}} \left[v_i (1 + \beta z)^{\frac{2-m}{2}} \right] dz}{\int_1^{1+\beta h} z^{1-m} V_{\frac{1}{2-m}}^2 \left[v_i (1 + \beta z)^{\frac{2-m}{2}} \right] dz} \quad (10)$$

Wherein the function $V_{\frac{1}{2-m}}(x)$ depends on the value $\frac{1}{2-m}$. If it is even, then

$$V_{\frac{1}{2-m}} \left[v(1 + \beta z)^{\frac{2-m}{2}} \right] = J_{\frac{1}{2-m}} \left[v(1 + \beta z)^{\frac{2-m}{2}} \right] Y_{\frac{1}{2-m}}(v) - J_{\frac{1}{2-m}}(v) Y_{\frac{1}{2-m}} \left[v(1 + \beta z)^{\frac{2-m}{2}} \right]. \quad (11)$$

When it is fractional $\frac{1}{2-m}$, then

$$V_{\frac{1}{2-m}} \left[v(1 + \beta z)^{\frac{2-m}{2}} \right] = J_{\frac{1}{2-m}} \left[v(1 + \beta z)^{\frac{2-m}{2}} \right] Y_{-\frac{1}{2-m}}(v) - J_{-\frac{1}{2-m}} \left[v(1 + \beta z)^{\frac{2-m}{2}} \right] Y_{\frac{1}{2-m}}(v). \quad (12)$$

where $J_{\frac{1}{2-m}}$, $Y_{\frac{1}{2-m}}$ - Bessel functions of the first and second kinds correspondingly. And the parameter ν in (9) - (12) is of the following transcendental equation:

$$\text{for the even index } \frac{1}{2-m}$$

$$J_{\frac{1}{2-m}}(\nu)Y_{\frac{m-1}{2-m}}\left[\nu(1+\beta h)^{\frac{2-m}{2}}\right] - Y_{\frac{1}{2-m}}(\nu)J_{\frac{m-1}{2-m}}\left[\nu(1+\beta h)^{\frac{2-m}{2}}\right] = 0, \quad (13)$$

for fractional index

$$J_{\frac{1}{2-m}}(\nu)Y_{\frac{m-1}{2-m}}\left[\nu(1+\beta h)^{\frac{2-m}{2}}\right] - Y_{\frac{1}{2-m}}(\nu)J_{\frac{m-1}{2-m}}\left[\nu(1+\beta h)^{\frac{2-m}{2}}\right] = 0. \quad (14)$$

Equation (13), (14) using concrete numbers m have countless varieties of material radicals ν . Due to the expression (9) and (5) the tension in soil $\sigma(z, t)$ at any given time is equal to

$$\sigma(z, t) = q_0 - \sqrt{1+\beta z} \sum_{i=0}^{\infty} C_i V_{\frac{1}{2-m}}\left[\nu_i(1+\beta z)^{\frac{2-m}{2}}\right] e^{-C_{1\nu}\lambda_i^2 t}, \quad (15)$$

From (9) and (15) we can obtain the solution of the problem for soil, the deformation modulus of which will vary depending on coordinate, i.e. on the depth. To do this, you must assume that $\beta = 1$ and $m = 0$. Then the index of the Bessel functions $\frac{1}{2-m}$ is equal to $\frac{1}{2}$.

Due to the fact that the exponential function e^{-x} rapidly decreases at higher values of the index, then (9) is limited to only the first member of the series. Wherein the solution of the problem relatively to pore pressure according to (9) can be written as follows:

$$p(z, t) = C_0 \sqrt{1+\beta z} V_{\frac{1}{2-m}}\left[\frac{2\lambda_0}{2-m}(1+\beta z)^{\frac{2-m}{2}}\right] e^{-C_{1\nu}\lambda_0 t}, \quad (16)$$

Equation (16) describes a dispersion of the pore pressure in time and depth. This expression is a generalized result of M.Yu. Abelev [7] and K.Terzaghi [8].

The tension in the soil skeleton comes from the coefficient (15), i.e.

$$\sigma(z, t) = q - C_0 \sqrt{\alpha + \beta z} V_{\frac{1}{2-m}}\left[\nu_0(\alpha + \beta z)^{\frac{2-m}{2}}\right] e^{-C_{1\nu}\lambda_0 t}, \quad (17)$$

The obtained expressions (16) and (17) respectively allow to determine the pressure changes in the pore fluid and tensions in the soil skeleton for any point of the considered heterogeneous two-phase soil's final area of compaction, having an elastic property. After the specified tension in the skeleton of compaction heterogeneous soil massif, we can calculate vertical displacements of the points of the soil compacted layer's upper surface (sediment).

Indeed, if a certain vertical tension is applied to the surface of soil layer, then the corresponding sediments $S(t)$ can be determined by formula [3], i.e.

$$S(t) = \int_0^h \frac{\varepsilon_0 - \varepsilon(z, t)}{1 + \varepsilon_0} dz, \quad (18)$$

where h - capacity of heterogeneous compacted soil massif. Since $\varepsilon(\tau_1) - \varepsilon(z, t) = a(z)\sigma(z, t)$, then (18) takes the form

$$S^{(H)}(t) = \frac{1}{1 + \varepsilon_0} \int_0^h a(z) \sigma(z, t) dz \quad (19)$$

In (19) instead of $\sigma(z, t)$ by substituting (17), we find

$$S^{(H)}(t) = \frac{a_0}{1 + \varepsilon_0} \int_0^h (1 + \beta z)^{-m} \left\{ q - \sqrt{1 + \beta z} V_{\frac{1}{2-m}} \left[\nu_0 (1 + \beta z)^{\frac{2-m}{2}} \right] e^{-C_{1\nu} \lambda_0 t} \right\} dz$$

from whence

$$\begin{aligned} S^{(H)}(t) = & \frac{a_0}{1 + \varepsilon_0} \left\{ \frac{q}{\beta(1-m)} [(1 + \beta h)^{1-m} - 1] - \right. \\ & \left. - \frac{\gamma_\varepsilon}{\beta(1-m)} \left[1 - \frac{1}{\beta(2-m)} \right] [(1 + \beta h)^{2-m} - 1] - \right. \\ & \left. - \int_0^h (1 + \beta z)^{1-m} V_{\frac{1}{2-m}} \left[\nu_0 (1 + \beta z)^{\frac{2-m}{2}} \right] e^{-C_{1\nu} \lambda_0 t} dz \right\} \end{aligned} \quad (20)$$

With $t \rightarrow \infty$ from (20) we have

$$\begin{aligned} S^{(H)}(\infty) = & \frac{a_0}{\beta(1 + \varepsilon_0)(1-m)} \left\{ q [(1 + \beta h)^{1-m} - 1] - \right. \\ & \left. - \gamma_\varepsilon \left[1 - \frac{1}{\beta(2-m)} \right] [(1 + \beta h)^{2-m} - 1] \right\} \end{aligned} \quad (21)$$

From (21) for a homogeneous soil we obtain

$$S^{(0)}(\infty) = \frac{a_0 h}{1 + \varepsilon_{cp}} q, \quad (22)$$

Equation (22) depends only on the thickness of the compacted layer, tension compressibility coefficient and does not depend on heterogeneous soil parameters.

Thus, the expression (16), (17) and (20) make it possible to determine the numerical values of pressure in pore fluid, tensions in the soil skeleton and sediments of the compacted heterogeneous soil.

Two-dimensional problem. With the construction of facilities on the sandy soils its sediment, mainly, stops in the end of the construction season. Absolutely diverse thing happens when the construction takes place on clay soils, which often lead to difficult situations, causing deformations and sometimes even crashes of erected structures on them.

This is due to underestimation of their more complex nature and uniqueness of the interactions of these soils' solid particulates. Therefore, in this respect we need to provide the models with calculations, considering the compaction of clay soils, which in advance would allow setting the strength and stability of the structures being built on these grounds.

In this regard, we consider the process of two-dimensional compaction of heterogeneous water saturated soils at their heterogeneous boundary conditions. The compacted soil heterogeneity is expressed through the module of its deformation, which varies according to the depth of the soil massif exponentially, i.e.,

$$E = E_0 e^{\alpha z}, \quad 0 < \alpha < 1, \quad z \in [0, h], \quad (23)$$

where E_0 , α - experimental data.

G.Ya.Popov [8] has formulated and solved the concrete problem of elasticity theory.

Thus, if we choose the modulus of compacted soil massif in the form (23), then the equation of compaction (7) takes the form

$$\frac{\partial p}{\partial t} = C_v^{(2)} \cdot e^{\alpha \cdot y} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \right), \quad (24)$$

where

$$C_v^{(2)} = \frac{k(1 + \varepsilon_{cp}) \cdot (1 + \zeta)}{2\alpha\gamma_B}.$$

Let's consider the process of water permeable soil massif's compaction in the form of a rectangle, thickness h , having a waterproof bounding walls by the sides and a waterproof layer at a depth h . Suppose also that evenly-distributed tension of intensity q is applied at a certain part of the rectangle's top surface at the time $t = \tau_1$.

At the boundaries of the studied soil rectangle we have the following boundary conditions:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pm \ell} \frac{\partial p_0}{\partial x} &= 0, & \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\partial p_0}{\partial y} &= 0; \\ \lim_{\substack{y \rightarrow h \\ |x| < a}} p_0 &= p, & \lim_{\substack{y \rightarrow h \\ -\ell < x < -a \\ a < x < \ell}} p_0 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Besides (25) due to the symmetry p_0 must be even with respect to x , i.e. $p_0(x, y) = p_0(-x, y)$. In order to determine the pressure in the pore fluid, corresponding to the initial moment of time, it is needed to solve the differential equation of the following form

$$\frac{\partial^2 p_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p_0}{\partial y^2} = 0. \quad (26)$$

This solution will in the form of

$$p_0(x, y) = \frac{qa}{\ell} + 2q \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{j\pi a}{\ell}}{j\pi} \cdot \frac{ch\left(\frac{j\pi}{\ell}\right)y}{ch\left(\frac{j\pi}{\ell}\right)h} \cos \frac{j\pi}{\ell} x. \quad (27)$$

The expression (27) fully satisfies the boundary conditions (25) of the problem. The abovementioned soil massif's strained condition for the time $t = \tau_1$ is studied in [9].

According to the condition of the studied problem the boundary conditions with respect to the pore pressure $p(x, y, t)$ are heterogeneous:

$$\left. \begin{aligned} p &= 0 & \text{при } y = h & \quad a < x < \ell \text{ и } -\ell < x < -a, \\ p &= x(t) \frac{q}{\ell} & \text{при } y = h & \quad -a < x < a \text{ и } 0 > x(t) \geq 0, \\ \frac{\partial p}{\partial x} &= 0 & \text{при } x = \pm \ell, \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= 0 & \text{при } y = h, & \quad -\ell < x < \ell. \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Solving the equation (24) at (28), we obtain the following calculation formula for estimating the pore pressure in the compaction of heterogeneous soil massif, which has elastic properties.

$$p(x, y, t) = \frac{aq \cdot \mathfrak{a}(t)}{\ell} + 2q\mathfrak{a}(t) \cdot \sum \frac{\sin \frac{n\pi a}{\ell}}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{\ell} + \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \left[A_{ij} \cdot e^{-C_V^{(1)} \lambda_{ij}^2 \cdot (t-\tau_1)} + \int_{\tau_1}^t Q_{ij}(\tau) \cdot e^{-C_V^{(1)} \lambda_{ij}^2 \cdot (t-\tau)} d\tau \right] \cdot W_v \left(\mu_j e^{-\frac{\alpha}{2}y} \right) \cdot \cos \frac{i\pi}{\ell} x, \quad (29)$$

where

$$A_{ij} = \frac{1}{\int_0^h W_v^2 \left(\mu_j e^{-\frac{\alpha}{2}y} \right) dy} \left\{ \frac{\sin \frac{i\pi a}{\ell}}{i\pi} \left[\frac{\int_0^h ch \frac{i\pi}{\ell} y \cdot W_v \left(\mu_j e^{-\frac{\alpha}{2}y} \right) dy}{ch \frac{i\pi}{\ell} h} - \mathfrak{a} \right] \right\}. \quad (30)$$

It should be noted that the expression (30) at $t \rightarrow \infty$ will be equal 0, as $\mathfrak{a}(t) \rightarrow 0$. The sum of the main tensions in the soil skeleton is defined by the formula

$$\theta(x, y, t) = \frac{aq}{\ell} [1 - \mathfrak{a}(t)] + 2q \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi a}{\ell}}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{\ell} \times \left[\frac{ch \frac{h\pi y}{\ell}}{n\pi} - \mathfrak{a}(t) \right] - q \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \left[A_{ij} \cdot e^{-C_V^{(1)} \lambda_{ij}^2 \cdot (t-\tau_1)} + \int_{\tau_1}^t Q_{ij}(\tau) \cdot e^{-C_V^{(1)} \lambda_{ij}^2 \cdot (t-\tau)} d\tau \right] \times W_v \left(\mu_j e^{-\frac{\alpha}{2}y} \right) \cdot \cos \frac{i\pi}{\ell} x. \quad (31)$$

The vertical movement of the top surface's points, i.e. sediment of the compacted soil layer will be defined by the formula (18).

Substituting (31) into (18) we find

$$S(x, t) = \frac{a_0 q h}{1 + \varepsilon(\tau_1)} \left\{ \frac{1}{\ell} [1 - \mathfrak{a}(t)] - 2\mathfrak{a}(t) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi a}{\ell}}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{\ell} - \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \left[A_{ij} \cdot e^{-C_V^{(1)} \lambda_{ij}^2 \cdot (t-\tau_1)} + \int_{\tau_1}^t Q_{ij}(\tau) \cdot e^{-C_V^{(1)} \lambda_{ij}^2 \cdot (t-\tau)} d\tau \right] W_v \left(\mu_j e^{-\frac{\alpha}{2}y} \right) \cdot \cos \frac{i\pi}{\ell} x. \right\} \quad (32)$$

The obtained expressions (29), (31) and (32) at (33) give us respectively an opportunity to calculate pressure in pore fluid, the amount of main tensions and sediment of compacted heterogeneous soil massif, possessing elastic property.

Three-dimensional problem. Let's consider the compaction of the soil massif in the form of a parallelepiped with a confining layer at a depth of h and waterproof walls $2\ell_1$ and $2\ell_2$. Evenly distributed

tension with intensity q is applied instantaneously on top of the surface of the parallelepiped with sides $2a$ and $2b$.

For this problem, the range of variation of the independent variables is the parallelepiped formed by planes

$$x = \pm \ell_1; \quad y = \pm \ell_2; \quad z = 0; \quad z = h.$$

According to the problem, the boundary conditions at $t = \tau_1$ will be:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{z \rightarrow h} p_0(x, y, z) &= \begin{cases} q \text{ нпу} & |x| < a, \quad |y| < b \\ 0 \text{ нпу} & |x| > a, \quad |y| > b \text{ или} \\ & |x| > a, \quad |y| < b \text{ или} \quad |x| < a, \quad |y| > b \end{cases} \\ \frac{\partial p_0}{\partial x} \Big|_{x=\pm \ell_1} &= 0; \quad \frac{\partial p_0}{\partial y} \Big|_{y=\pm \ell_2} = 0; \quad \frac{\partial p_0}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

Also because of the symmetry function $p_0(x, y, z)$ must be an even with respect to x and y separately, i.e.

$$p(x, y, z) = \begin{cases} p(-x, y, z) \\ p(x, -y, z) \end{cases} \quad (34)$$

In order to determine the distribution of instantaneous pressures in the pore liquid in the indicated layer of soil, it is necessary to solve a differential equation of the following kind

$$\frac{\partial^2 p_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p_0}{\partial z^2} = 0. \quad (35)$$

Here, the function $p_0(x, y, z)$ is dependent on spatial coordinates. The solution of equation (35) at (33), (34) was studied in [9]. Solving (35) under the conditions of (33), (34), we obtain

$$p_0(x, y, z) = q \cdot \left[\frac{ab}{\ell_1 \ell_2} + \frac{2b}{\ell_2} \sum_{m=1}^{\infty} a_m \operatorname{ch} \left(\frac{m\pi}{\ell_1} z \right) \cdot \cos \frac{m\pi}{\ell_1} x + \frac{2a}{\ell_1} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{ch} \left(\frac{n\pi}{\ell_2} z \right) \times \right. \\ \left. \times \cos \frac{n\pi}{\ell_2} y + 4 \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_m b_n c_{mn} \operatorname{ch} \left(\frac{m\pi}{\ell_1} h \right) \cdot \operatorname{ch} \left(\frac{n\pi}{\ell_2} h \right) \cdot \cos \frac{m\pi}{\ell_1} x \cdot \cos \frac{n\pi}{\ell_2} y \cdot \operatorname{ch} \alpha_{mn} z \right], \quad (36)$$

where

$$\left. \begin{aligned} a_m &= \frac{\sin \frac{m\pi a}{\ell_1}}{m\pi \cdot \operatorname{ch} \left(\frac{m\pi}{\ell_1} h \right)}; \\ b_n &= \frac{\sin \frac{n\pi b}{\ell_2}}{n\pi \cdot \operatorname{ch} \left(\frac{n\pi}{\ell_2} h \right)}; \\ c_{mn}^{-1} &= \operatorname{ch} \alpha_{mn} h; \\ \alpha_{mn} &= \left[\left(\frac{m\pi}{\ell_1} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{\ell_2} \right)^2 \right]^{1/2}. \end{aligned} \right\}$$

Then the solution of equation

$$\frac{\partial p}{\partial t} = C_V^{(3)} e^{\alpha \cdot z} \cdot \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \right), \quad (37)$$

where

$$C_V^{(3)} = \frac{k(1 + \varepsilon_{cp}) \cdot (1 + 2\xi)}{3a_0 \gamma_B}$$

It will look like:

$$\begin{aligned} p(x, y, z, t) = & \alpha(t)q + \left[\frac{ab}{\ell_1 \ell_2} + \frac{ab}{\ell_2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi a}{\ell_1}}{m\pi} \cos \frac{m\pi}{\ell_1} x + \frac{2a}{\ell_1} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi b}{\ell_2}}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{\ell_2} y + \right. \\ & \left. + 4 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi a}{\ell_1}}{m\pi} \cdot \frac{\sin \frac{n\pi b}{\ell_2}}{n\pi} \cos \frac{m\pi}{\ell_1} x \cos \frac{n\pi}{\ell_2} y \right] + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} T_{mnk}(t) \cdot W_V \left(\mu_k e^{-\frac{\alpha}{2} z} \right) \times \\ & \times \cos \frac{m\pi}{\ell_1} x \cos \frac{n\pi}{\ell_2} y. \end{aligned} \quad (38)$$

where

$$\begin{aligned} T_{mnk}(t) = & C_{mnk} e^{-C_V^{(3)} \lambda_{mnk}^2 (t-\tau_1)} + \int_{\tau_1}^t Q_{mnk}(\tau) \cdot e^{-C_V^{(3)} \lambda_{mnk}^2 (t-\tau)} d\tau. \quad (39) \\ C_{mnk} = & \frac{4 \int_0^{\ell_1} \int_0^{\ell_2} \int_0^h \left[\left(\frac{\theta^*}{3} + p^* \right) - \alpha(t) p_{mn}(x, y, h, \tau_1) \right] \cdot W_V \left(\mu_k e^{-\frac{\alpha}{2} z} \right) \cos \frac{m\pi}{\ell_1} x \cos \frac{n\pi}{\ell_2} y dx dy}{\ell_1 \ell_2 \int_0^h W_V \left(\mu_k e^{-\frac{\alpha}{2} z} \right) dz}. \end{aligned}$$

The sum of the main tensions will be calculated by the formula [9]. Knowing the amount of the main tensions, we determine sediment of the compacted soil massif, presented in the form of a parallelepiped having an elastic property. Wherein the modulus of its deformation is considered variable in its depth.

Using these data, numerical values of pore pressure, the amount of the main tensions, and also the value of the compacted massif's sediment can be calculated. Analysis of the curves shows that the values of pore pressure for biphasic soil ground in the initial period is almost two times smaller than the values for the three-phase ground. The values of the sediment for the three-phase soil are much more than for the two-phase soil base.

It should also be noted that recently the impact of the variability of the filtration coefficient in the compression process is considered in the following works [3], [12].

REFERENCES

- [1] M.Yu. Abelev. Construction of industrial and civil constructions on weak water-saturated ground. M.: Construction publishing, 1983. p.247.
- [2] B.N.Barshevsky. Determination of the characteristics of the deformable axis of ground, considered as a continuous inhomogeneous environment on depth// Basics, Foundations and mechanism of Soil. **1969**. №1. p.46-58.
- [3] A. D. Dasibekov, A. Asibekov, G. Makasheva, G. A. Takibaeva. The variability impact of coefficient of filtration of module deformation on consolidation process // Works of Int. scientific – method. Conf. at University of Friendship of Nation. Shymkent, **2006**. Part 1.

- [4] V.A.Fljrin. Fundamentals of soil mechanism.-M.: State Construction Publishing. Part 1.2. 1959. P.357.: 1961-P.543.
- [5] N.M. Gersevanov. Collected Works.-M.: Construction and Naval Publishing. 1948. Part1. 2. P.644.
- [6] L.A.Galin. Contact problems of the theory of elasticity for bodies with variable elastic modulus// Procrrdings of the All-Union Meeting on implementation of methods of theoretical physics to the problems of mathematical physics. Tbilisi, 1961. p.123-138.
- [7] G.K.Kelin. Analysis of beam on a solid basis, which is continuously inhomogeneous on depth// Conctruction,Mechanics and design: Collected works MIITS Moskoww City Executive Committee. 1954. No.3. p.131-137.
- [8] Ya. A. Macheret. Distribution of instant push and pressures in soil mass caused by the instantaneous thrust // Works VIOS. 1934, № 4. p. 65-121. p. 228-232.
- [9] G. Ya. Popov. By the theory of bending of plates on elastic inhomogeneous halfspace. // Constrution and architure. 1959, № 12. p. 11 – 19.
- [10] G. A. Takibaeva. Three- dimensional task of mechanics of consolidated sil mass at a pressure which is depending on the filtration coefficient // Pub. NAS of RK. Part “Physics and Mathematics” . 2006, № 1. p. 54-57.
- [11] N.A.Tsytovich. Soil Mechanics.-M.; Literature on construction, architecture and construction materials.-1963.-P.633.
- [12] K.Tertsaghi. Structural Mecanism of Soil. M. : State construction publishing., p. 1933. 510.

ОӘЖ 624.131+539.215

А.А Юнусов³, А. Дасибеков², Б.Н.Корганбаев¹, А.А. Юнусова⁴, З.А. Абдиева³, Н. Коспанбеова³

¹Халықаралық Гуманитарлық –Техникалық Университеті.
(160012, .Шымкент, А.Байгурсынова 80 , Қазақстан Республикасы);

²М. Ауэзов атындағы ОҚМУ. (160012, . Шымкент, Тауке-Хана 5,
Қазақстан Республикасы), e-mail Yunusov1951@mail.ru;

³КІПХДУ (160012, Шымкент , Толеби-32), Қазақстан Республикасы;

⁴Еуразия гуманитарлық институті. Астана.к. Қазақстан Республикасы

ТЕРЕҢДІК БОЙЫНША АЙНЫМАЛЫ ДЕФОРМАЦИЯ МОДУЛДІ ГРУНТТЕР КОНСОЛИДАЦИЯСЫНЫҢ КӨПӨЛШЕМДІ ЕСЕПТЕРІ

Аннотация: Грунтқа жүктелген нагрузка консолидациялық емес жағдайда грунт скелетіменде және қуыстық сұйықтықпенде қабылданады. Бұнда, бір өлшемді жағдай үшін элементар алаңдағы қысым грунт скелетіне напряжениядан және судағы қысымнан құралады. Лейде грунт скелетіне түсетін напряженисі эффектті, судағы қысымды нетраль , ал грунт бетіне қыйылған меншікті қысымды-тоталдық деп атайды.

Барлық есептер нейтраль қысымды анық тауға келтіріледі. Келесі шамалар жай табылады. Демек, қуыстық сұйықтағы қысымды табу қажет. Оны анықтау үшін бұл қысымды табу қажет.

Консолидацияның фильтрациялық теориясында грунт жағдайының негізгі реалогиялық тендеу ретінде компрессиялық қысық қабылданды, ал фазалардың өзара әрекеттесуі тепе-теңдіктің тендеуімен жазылады, осыған сәйкес грунтқа қойылған меншікті жүк эффектті және нейтраль қысымдардан құралады. Мұнда ауа көшуі қысым мен көлем арасындағы байланысты тағайындайтын Бойл-Мориотт заңына бағынады, ал судағы еріген газ Генри заңына бағынады. Бұл модель есептің математикалық қойылуын ықшамдауға мүмкіндік береді және грунт консолидациясы есебінің шешімін анықтауды жеңілдетеді.

Грунт тығыздалуы негізінен өзінің сығылуымен анықталады. Негіздің сығылуы грунт типіне, сондай-ақ жүк характеріне байланысты. Грунттардың сығылу құбылысы консолидацияланған негіздегі инженерлік құрылыстарды жобалауда айтарлықтай үлкен маңызға ие. Мұнда грунттардың сығылу деформациясы негізіне қатты бөлшектердің өзара жақындасуы салдарынан болады және грунт скелетінде сығушының өзгеруінен қуыстық коэффициентінің өзгеруімен бағаланады. Грунт скелетіндегі сығушы және қуыстық коэффициент арасындағы байланысты анықтау әдетте лабораториялық жолмен компрессор құрылғыларында жүргізіледі. Төменде құмды жастық астында жататын h қуатты суға тойған біртекті емес грунт қабатының тығыздалу процесін қарастырамыз. Бастапқы уақыт ($t=0$) моментінде грунт қабатында бір сәтте интенсивтілігі $q(z,t)$ таралған жүк қойылады. Бұл жағдайда осы есептің математикалық қойылуы келесіге келтіріледі: қуыстық сұйықтағы $p(z,t)$ қысымды, грунт скелетіндегі $\Omega(z,t)$ және тығыздалып жатқан грунттық негіздің жоғары бетінің вертикал көшуі анықтау талап етіледі.

Негіздің сығылуы грунт типіне, сондай-ақ жүк характеріне (сипатына) байланысты. Жұмыста және де деформацияланған қатты денелер механикасының жазық және кеңістік есептерін зерттелген.

Тірек сөз: интегральдай формуласы, топырақ, тіктортбұрыш, негізі, шекаралық шарт.

А.А. Юнусов³, А. Дасибеков², Б.Н. Корганбаев¹,
А.А. Юнусова⁴, З.А. Абдиева³, Н. Коспанбеова³

¹ МГТУ (160012, Шымкент, ул. А. Байтурсынова 80, Республика Казахстан);

² Южно-казахстанский государственный университет имени М. Ауэзова
(160012, Шымкент, ул. Тауке-Хана 5, Республика Казахстан), e-mail Yunusov1951@mail.ru;

³ КИПУДН (160012, Шымкент, ул. Толеди-32), Республика Казахстан;

⁴ Евразийский гуманитарный институт, г. Астана, Республика Казахстан

МНОГОМЕРНЫЕ ЗАДАЧИ КОНСОЛИДАЦИИ ГРУНТОВ С ПЕРЕМЕННЫМ ПО ГЛУБИНЕ МОДУЛЕМ ДЕФОРМАЦИИ

Аннотация: В неконсолидированном состоянии нагрузка, приложенная к грунту, воспринимается как скелетом грунта, так и поровой жидкостью. При этом, для одномерного случая давление на элементарной площадке складывается из напряжения в скелете грунта и давления в воде. Иногда напряжение, приходящее в скелете грунта называют эффективным, давление в воде нейтральным, а удельное давление, приложенное в целом на поверхность грунта - тотальным.

Все задачи здесь сводятся к определению нейтрального давления. Последующие величины находятся просто. Следовательно, необходимо находить давление в поровой жидкости. Чтобы его определить следует находить это давление.

В фильтрационной теории консолидации в качестве основного реологического уравнения состояния грунта принимается компрессионная кривая, а взаимодействие фаз описывается уравнением равновесия, в соответствии с которым приложенная к грунту удельная нагрузка складывается из эффективного и нейтрального давлений. Причем здесь перемещение воздуха подчиняется закону Бойля-Мариотта, устанавливающему связь между давлением и объемом, а растворенный газ в воде подчиняется закону Генри. Эта модель позволяет упростить математическую постановку задачи и облегчает определения решений задач консолидации грунтов.

Уплотнение грунта в основном определяется своей сжимаемостью. Сжимаемость основания зависит как от типа грунта, так и от характера нагрузки. Явление сжимаемости грунтов имеет весьма большое значение при проектировании инженерных сооружений на консолидируемом основании. При этом деформация сжатия грунтов в основном происходит вследствие сближения твердых частиц между собой и оценивается изменением коэффициента пористости при изменении сжимающих напряжений в скелете грунта. Определение зависимости между коэффициентом пористости и сжимающими напряжениями в скелете грунта обычно производится лабораторным путем в компрессионных приборах.

Ниже рассмотрим процесс уплотнения слоя неоднородного водонасыщенного грунта мощностью h , залегающего под песчаной подушкой. В начальный момент времени ($t = \tau_1$) к слою грунта мгновенно прикладывается распределенная нагрузка с интенсивностью $q(z, t)$. Тогда математическая постановка данной задачи сводится к следующему: требуется определить давление в поровой жидкости $p(z, t)$, напряжение в скелете грунта $\sigma(z, t)$ и вертикальные перемещения верхней поверхности $S(t)$ (осадок) уплотняемого грунтового основания.

В работе также исследованы плоское и пространственное задачи механики деформированного твердого тела.

Ключевые слова: уравнение, интегральная форма, процесс, уплотнение, почва, прямоугольник, основа, граничное условие.

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 1, Number 317 (2018), 87 – 93

УДК372.85

Е.И. Смирнов¹, А.Л. Жохов¹, А.А. Юнусов³, А.А. Юнусова⁴, О.В. Симонова²¹ФГОУ ВПО «Ярославский государственный педагогический университет им. К.Д. Ушинского»,
г.Ярославль, Россия;²Кировское областное государственное образовательное учреждение, лицей, г. Киров, Russia;³КИПУДН (160012, Шымкент, ул. Голуби-32), Республика Казахстан;⁴Евразийский гуманитарный институт, г. Астана, Республика Казахстанya.lvovich2012@yandex.ru zhall@mail.ru Yunusov1951@mail.ru s545231@yandex.ru**НАГЛЯДНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭТАПОВ ПРОЯВЛЕНИЯ
СУЩНОСТИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ПОНЯТИЙ И МЕТОДИЧЕСКИХ
ПРОЦЕДУР**

Аннотация. Одним из путей повышения эффективности математического образования школьников является актуализация способов решения сложных задач путем адаптации современных достижений науки. Возможность этого возникает при выявлении «проблемных зон» математического образования и построении обобщенных конструкций, связанных с «проблемной зоной». В данной статье на основе диалога культур и средствами математического и компьютерного моделирования выстроены этапы адаптации и технологические конструкции актуализации синергии в обучении при исследовании понятия предела функции. Дидактическим механизмом освоения сущности такого конструкта оказывается реализация модели кластера фундаментирования, оснащенного комплексами мотивационно-прикладных учебных ситуаций и задач разного уровня. Лонгитюдное исследование «проблемных зон» позволяет эффективно развивать интеллектуальные операции мышления, межкультурные коммуникации, творческую самостоятельность и самоорганизацию личности школьника.

Ключевые слова: математическое образование, диалог культур, синергия, кластеры фундаментирования, функциональная грамотность деятельности, компьютерное моделирование, решение сложных задач, предел функции.

Введение. Молодые люди современного мира стали более нетерпимыми к проявлениям устоявшихся штампов в образовании, отсутствию гибкости в обучающих воздействиях, стали прагматично оценивать складывающиеся обстоятельства жизни, отдавать приоритет выстраиванию личностных предпочтений и перспектив своей будущей жизни. В то же время, интеллектуальные операции мышления (понимание, конкретизация, абстрагирование, обобщение, моделирование, аналогия, ассоциации и т.п.), лежащие в основе формирования универсальных учебных действий обучаемых, по разным объективным и субъективным причинам перестали эффективно развиваться в школьном образовании. И в этом процессе теряется роль математического образования как одного из наиболее эффективных инструментов личностного развития и освоения социального опыта предшествующих поколений, в том числе на фоне грандиозных приложений математики. Достаточно упомянуть достижения фрактальной геометрии (Б.Мандельброт, М.Фейгенбаум, М.Барнслоу, Е.Федер, В.С.Секованов и др.), теории хаоса и катастроф (Г.Хакен, Э.Лоренц, А.Н.Колмогоров, В.И.Арнольд, Г.Г.Малинецкий, Р.Том, О.Ресслер и др.), теория нечетких множеств и fuzzy-logic (Т.Заде, А.Кофман, Р.Рональд и др.), теории кодирования и шифрования (К.Шеннон, Д.Хаффман, Л.С.Хилл и др.), теории обобщенных

функций (Л.Шварц, Л.В.Соболев, И.М.Гельфанд, А.Мартино, В.П.Паламодов и др.) и др. А ведь именно в современных условиях интенсивного применения математических методов в естествознании, гуманитарных науках, технике и смежных науках, да еще в соединении с информационными технологиями, данные исследования должны были бы непременно находить свое отражение в изменяющихся программах школьного и вузовского математического образования. Прежде всего, возрастает потребность в *актуализации обобщенных конструкций и отношений в содержании* школьного и профессионального математического образования, связанных, прежде всего с решением и исследованием сложных задач средствами математического и компьютерного моделирования. Как отмечал С.Л. Рубинштейн [2] "...генерализация отношений предметного содержания выступает, а затем и осознается как генерализация операций, производимых над обобщенным предметным содержанием; генерализация и закрепление в индивиде этих генерализованных операций ведут к формированию у индивида соответствующих способностей". В такой парадигме важнейшая роль в повышении качества обучения математике в средней школе принадлежит педагогу. Например, в идеале будущий учитель должен овладеть обобщенным предметным содержанием и способами деятельности в вузе с тем, чтобы, придя в школу, осваивать школьный предмет вместе с учениками на уровне *фундированной сущности*, отрицая, тем самым, так называемое известное "двойное забвение" по Ф. Клейну.

Наша концепция предполагает, что обучение математике должно происходить в информационно-насыщенной образовательной среде *в условиях диалога математической, информационной гуманитарной и естественнонаучной культур* и интеграции дидактических усилий педагога и ученика в направлении вскрытия сущностей базовых учебных элементов (устоявшихся знаковых форм, понятий, теорем, процедур, алгоритмов, идей). А подобные процессы оказываются непосредственно связанными с синергетическими эффектами и механизмами восприятия сложной информации личностью обучаемого, процессами развития его математических способностей и творческой самостоятельности, конструированием специальных процедур освоения математических знаковых форм, объектов и явлений. Как результат такой когнитивной активности будет заметен рост учебной и профессиональной мотивации, развитие и саморазвитие мышления, и расширение опыта и культуры в контексте прикладной и профессиональной направленности. *Поэтому выявление этапов и иерархий в процессе уровневого выявления сущностей математических форм, понятий и процедур средствами наглядного моделирования* является важнейшим механизмом преодоления формализма в освоении содержания математики и представляет серьезную и далеко не решенную проблему в дидактике математики.

Методология, теории и технологии. Реализация объявленной концепции связана с освоением обучающимися сложного знания средствами математического и компьютерного моделирования в насыщенной информационно-образовательной среде. Эффективным инструментом освоения сложного знания может являться исследование и адаптация к школьной или вузовской математике современных достижений в науке, ярко и значимо представленных в приложениях к реальной жизни, развитии других наук, высоким технологиям и производствам. Разработка философской концепции сложности (И.Кант, Г.В.Гегель, И.Пригожин, Г.Хакен, В.В.Орлов, И.С.Утробин, Х..Альвен, Т.С.Васильева и др.) опосредована обширным экспериментальным материалом, практикой и взаимозависимостью интегративных процессов в науке, технологиях, экономике, социальных преобразованиях и образовательных парадигмах. Поливалентность, множественность, многополярность, непредсказуемость, эмерджентность и неравновесность современного мира не может не быть увязана с категориями развития сущности объектов, явлений и процессов посредством проявления закономерностей переходов на более высокие уровни сложности как составляющих конкретно-всеобщей теории развития (В.В.Орлов, Ст.Бир, Н.Винер, Дж.фон Нейман и др.). Исследователи делают вывод о том, что сложность является интегрирующей характеристикой способности к самоорганизации при достижении

определенных критических ее уровней. Так Френч П.А. и Функе Д. [8] определяют РСЗ как многошаговую поведенческую и когнитивную активность, направленную на преодоление большого числа заранее неизвестных препятствий между нечеткими, динамически изменяющимися целями и условиями.

Базовым понятием представленной концепции является понятие фундирования как философской категории, педагогической технологии и психологического механизма развития личности [3]. В чем же заключается феномен фундирования? Фундирование (нем. Fundierung – обоснование, основание) – термин, используемый в феноменологии (и в других науках) для описания отношений онтологического обоснования. Э. Гуссерль определяет отношение фундирования следующим образом: А фундировано посредством В, если для существования А сущностно необходимо В, только в единстве с которым А может существовать. Отношение фундирования может быть односторонним (А фундировано в В) или двухсторонним (А и В фундированы друг в друге). Согласно феноменологическому учению, все комплексные высокоуровневые акты и предметности фундированы в изначальных простых актах и предметах. В педагогику впервые понятие фундирования было введено В.Д. Шадриковым и Е.И. Смирновым в 2002 году [4] как процесс создания условий для поэтапного углубления и расширения школьных знаний в направлении профессионализации и формирования целостной системы научных и методических знаний, как процесс формирования целостной системы профессионально-педагогической деятельности. В связи с выявленными тенденциями авторами было предложено углубить теоретическую и практическую составляющие математического образования будущего учителя естественнонаучного профиля, изменив содержание и структуру естественнонаучной и методической подготовки в направлении усиления школьного компонента естественнонаучного образования с последующим фундированием знаний и опыта личности на разных уровнях. Принципиальным отличием структурообразующего принципа фундирования является определение основы для спиралевидной схемы моделирования базовых знаний, умений, навыков предметной (в том числе, математической) подготовки студентов педвузов. Школьные знания станут выступать структурообразующим фактором, позволяющим отобрать теоретические знания из предметной области более высокого уровня, через которые происходит фундирование школьного знания.

Проблема, однако, связана с тем, что обобщенная сущность сложна, многослойна, полифункциональна и с трудом осваивается многими обучающимися. Понятно, что подобные ситуации в освоении математики требуют введения специальных процедур, этапов и способов когнитивной деятельности школьников для максимальной возможности актуализации параметров порядка в этом «хаосе» математических понятий. Именно вскрытие сущности средствами наглядного моделирования таких «проблемных зон» в математическом образовании возможно проектированием диалога математических, информационных, естественнонаучных и гуманитарных знаний с проявлением синергетических эффектов.

1. Именно таким механизмом выступает *наглядное моделирование* [5] как инновационный конструкт, направленный на выявление сущности математических понятий, процедур и ситуаций на основе моделирования в обучении математике, необходимо ведущее к пониманию. Основной элемент – это центрирование ученика, оптимальное включение его перцептивных, когнитивных, рефлексивных, эмоционально-волевых, мотивационных и креативных подструктур в освоение математического знания. Главное при этом – адекватность априорной модели и результатов мыслительной деятельности обучающихся, осознанные и ведущие к пониманию. *Наглядное моделирование – это интерактивная триада: личность – модель – понимание.* Необходимые атрибуты наглядного моделирования: взаимопереходы знаковых систем: вербальной, знаково-символической, образно-графической и конкретно - деятельностью; устойчивость восприятия математических знаний; адекватность априорной и результативной моделей; отбор и актуализация

базовых учебных элементов; сензитивность модальностей восприятия; активность когнитивных процессов. Необходимо знание особенностей психического развития каждого ученика, видов и иерархии моделей, средств оптимизации логических структур, закономерностей восприятия и оперирования знаковых систем, средств диагностики состояния личности и интеллектуальных операций, контролирующих и оценивающих процедур, самосовершенствование и переподготовка педагога. Поэтому актуальной является проблема такой организации процесса обучения математике, когда представления, возникающие в мышлении обучаемых, отражают основные, существенные, ключевые стороны предметов, явлений и процессов, в том числе посредством адекватного моделирования математического знания. *Именно выявление и формирование в когнитивном процессе этих узловых, опорных качеств объекта или процесса восприятия (перцептивная модель), адекватно отражающих сущность объекта или процесса, и представляет собой суть процесса наглядного моделирования.* При этом особую значимость приобретают модели, фиксирующие процедуру математических действий в процессе исследовательской активности.

Так как сущность обнаруживает свою реальность в совокупности внешних характеристик предмета, в своих проявлениях, то раскрывая сущность через философские категории внутреннего, общего, содержания, причины, необходимости и закона определим, прежде всего, *компонентный состав содержательных и процессуальных характеристик проявления сущности.* Содержательный модус: знаково-символические, вербальные, образно-геометрические и тактильно-кинестетические проявления; процессуальный модус: историко-генетические, конкретно-деятельностные, экспериментальные и прикладные учебные ситуации и проявления. Постигание сущности предмета обучающимся в определенном категориальном поле знаний и способов деятельности, достаточное для успешности и эффективности оперирования с ней, не обязательно совпадает по содержанию и выраженности необходимых существенных связей. Более того, возможно присоединение дополнительных связей, которые в совокупности с необходимыми связями создают целостность и иерархичность сущности в данном категориальном поле. Эта изменчивость и подвижность сущности предмета требует актуализации поэтапного продвижения к ее познанию и определяет третье измерение сущности – личностно-адаптационное в ее характеристиках, и определяет трехкомпонентную целостность сущности предмета как объекта познания в ходе когнитивной деятельности. Таким образом, нами представлена *следующая структурно-функциональная модель сущности математических учебных элементов* (рис.1):

2. **Диалог культур – методический механизм:** в рамках данной работы используется как *диалог культур в его личностном аспекте* (ДКЛ), как коммуникация личностей участников – ДКЛ ($У_к$ – ученик; $У_л$ - учитель), осуществляемая ими на основе некоторого *произведения культуры* (ПК), возникшего в некоторой грани культуры и/или представленного в любом из возможных воплощений, включая учебный текст, созданный в том числе в процессе ДК. ДКЛ предполагает, прежде всего, духовное общение конкретных носителей индивидуальной (личностной) культуры при задействовании всех основных компонентов каждой личности.

В реальном исполнении ДКЛ осуществляется как своеобразный диалог в поле смыслов, задаваемых упорядоченной тройкой <"культура одного участника"; "культура ПК"; "культура другого участника">. В образовательном процессе в роли участников ДКЛ оказываются учитель ($У_л$) и учащиеся ($У_к$) в их различных сочетаниях (один - один, один - группа, группа - группа и т.п.). Роль учителя – **организовать** и **управлять** ДКЛ вплоть до его завершения и (или) перехода к новому ДКЛ на базе, желательно, тех ПК, которые были созданы в рамках совершившегося ДКЛ.

ДКЛ в методическом понимании – это искусство (и своеобразная технология) такой организации обучения, при которой у участников диалога необходимо происходит *вспышка понимания*, то есть "вдруг" возникает новое (личностно новое) понимание рассматриваемого ПК. Иными словами, в основе технологии ДКЛ лежит "диалектика как диалогическое искусство" (М.

Мамардашвили), как создание собственных ПК; только тогда и можно считать, что происходит "оттаивание" диалектики как диалогического искусства. В нашем понимании место ДКЛ (в любом из его вариантов) – второй этап познания математического объекта.

Считается, что ДКЛ состоялся, если в результате появляется новое для участников произведение культуры (ПК₂), созданное в процессе общения как результат совместного или индивидуального преобразования исходного ПК₁. Поскольку вместе с изменением ПК₁ происходят те или иные изменения участников ДКЛ, то последний в случае его завершения имеет смысл представить следующей схемой: $\langle U_{л} - ПК_1 - Y_{к} \rangle \rightarrow \langle U_{л} - ПК_2 - Y_{к} \rangle$. Педагогическим механизмом включения учащихся в ДКЛ является учебная ситуация "напряжения и успеха", организованная, например, на базе лично воспринятого фрагмента учебного материала, являющегося частным примером учебного ПК.

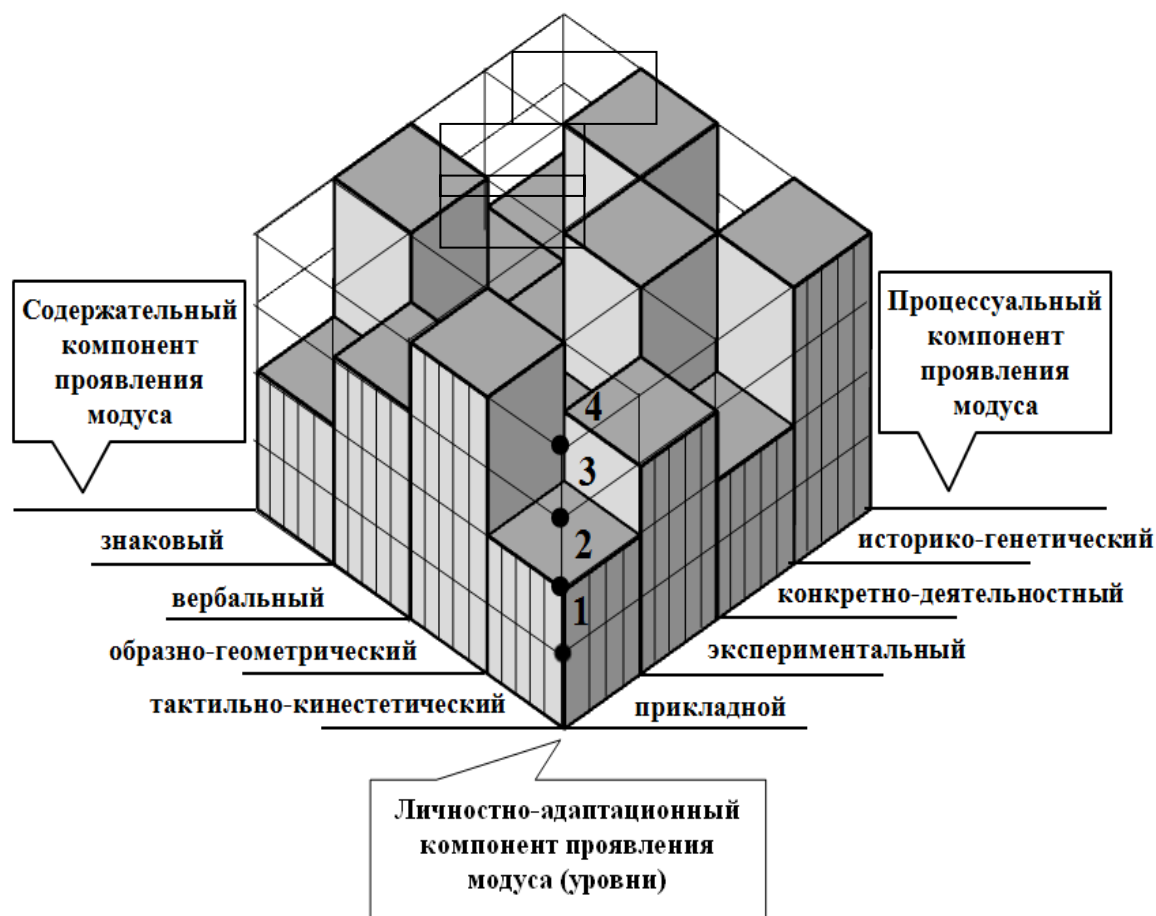


Рисунок 1 - Структурно-функциональная модель сущности математических учебных элементов

В литературе используется более широкое понятие – *диалог культур*, берущее свое начало из философии экзистенциализма. В отечественной культуре впервые раскрыто и активно использовалось философом и филологом М.М. Бахтиным, в дальнейшем – В.С. Библером, С.Ю. Кургановым и др. М.М. Бахтин определил *архитектонику* ДК как *ответственного поступка*; по Бахтину, его структурными элементами являются: *Я, Другой, Я-для-Другого*. Естественно, что в методическом плане это всё приобретает соответствующие оттенки и формы реализации [6].

Результаты. Ситуация хаоса в процессах освоения математических знаний и процедур определенными категориями школьников и студентов далеко не последняя проблема в образовании. Это отсутствие адекватных решений данной проблемы приводит к формализму знаний, невысокому уровню учебной и профессиональной мотивации, неадекватному уровню

личностного развития обучающихся, прежде всего в контексте самоорганизации и саморазвития личности. В настоящем исследовании данную проблему предлагается решать методами включения обучаемых в диалог культур, выстраивания и адаптации обобщенных конструктов сложного знания, лежащих в основе «проблемных зон» математического образования. Этими конструктами оказываются образцы современных достижений в науке: фрактальная геометрия, теория нечетких множеств, обобщенные функции, теория кодирования, теория хаоса и катастроф и т.п., решаемые средствами математического и компьютерного моделирования и адаптированные к наличному уровню математической компетенции школьников и студентов. В этом отношении параметрами порядка в математическом образовании выступают также технологии фундирования опыта личности и наглядного моделирования объектов, процедур и явлений, актуализирующие аспект теоретического обобщения, выстраивающие иерархии и этапы понимания существа математических понятий и процедур, способствующие развитию интеллектуальных операций и проявлению синергетических эффектов в обучении математике. Именно, разработана концепция и технология освоения сложного знания в математическом образовании школьников и студентов на основе адаптации современных достижений в науке к школьной и вузовской математике. Уточнены технологии фундирования опыта личности и наглядного моделирования объектов, процессов и явлений, разработаны характеристики и структурно-функциональная модель сущности математических учебных элементов на основе иерархичности. Разработан граф согласования этапов проявления сущности в «проблемной зоне» и этапов проявления синергии математического образования как дидактический механизм и модель когнитивной деятельности в процессе освоения математики с синергетическим эффектом. Педагогический опыт пилотной реализации разработанной технологии математического образования показывает ее эффективность в росте учебной и профессиональной мотивации, развитии интеллектуальных операций, повышении качества обучения математике школьников и студентов.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Подъяков А.Н. Психология обучения в условиях новизны, сложности, неопределенности. Психологические исследования. М.: Высшая школа экономики, 2015.-С. 6-10.
- [2] Рубинштейн С.Л. О мышлении и путях его исследования. М.: АН СССР, 1958.
- [3] Смирнов Е.И. Фундирование опыта в профессиональной подготовке и инновационной деятельности педагога. Монография.: Ярославль, Изд-во «Канцлер», 2012.-654 с.
- [4] Смирнов Е.И. Подготовка учителя математики: Инновационные подходы // Под ред. В.Д. Шадрикова. М.: Гардарики, 2002. 383 с.
- [5] Смирнов Е.И. Технология наглядно-модельного обучения математике. Монография.: Изд-во ЯГПУ, Ярославль, 1997.-323 с.
- [6] Симонова О.В., Жохов А.Л. Условия развития функциональной грамотности учащихся V-VI классов в процессе учебной математической деятельности// «Международные Колмогоровские чтения – XIV», посвященные 100-летию профессора З.А. Скопеца: Москва – Коряжма – Ярославль – Арзамас. Редакция газеты «Успешная». – 2017. С. 103-107.
- [7] Смирнов Е.И., Богун В.В., Уваров А.Д. Синергия математического образования педагога: введение в анализ. Монография. Канцлер, 2016.-308 с.
- [8] Функе И., Френш П.А. Решение сложных задач: исследования в Северной Америке и Европе // Иностранная психология. 1995. Т. 3, № 5. – С. 42-47.

Е.И. Смирнов¹, А.Л. Жохов¹, А.А. Юнусов³, А.А. Юнусов⁴, О.В. Симонова²

¹К.Д:Ушинский атындағы ЯМПУ, Ресей, Ярославль;

²Киров облыстық мемлекеттік білім орталығы, лицейі, Ресей, Киров;

³КИПХДУ Шымкент, Төлеби-32, Қазақстан Республикасы;

⁴Евразиялық гуманитарлық институты. Астана. Қазақстан Республикасы

МАТЕМАТИКАЛЫҚ ҰҒЫМДАРДЫҢ ЖӘНЕ ӘДІСТЕМЕЛІК ЖҰМЫСТАРДЫҢ ПАЙДА БОЛУ КЕЗЕҢДЕРІНІҢ МӘН-МАҒЫНАСЫНЫҢ КӨРНЕКІ МОДЕЛДҮ

Аннотация. Мектеп оқушыларына математикалық білім берудің тиімділігі нарттырудың бір жолы күрделі есептерді шығару жолда арын заманауи ғылымның жетістіктеріне лайықты етіп қайта жаңғырту. Мұндай мәселе математикалық білім берудегі «проблеммалық аймақтың» пайда болуы мен «проблемалық аймаққа» байланысты жалпыланған конструктарды құру мүмкіндігі белгілі болуына байланысты туындады.

Бұл мақала функцияның шегі ұғымын оқытуды зерттеу десинергияны қайта жаңғыртудағы математикалық және компьютерлік моделдеу құралдары мен технологиялық конструкттың бейімделу кезеңдерінің диалог мәдениеті негізінде құрылған. Мұндағы конструкты меңгерудің дидактикалық механизмінің мән-мағнасы, мативациялық-колдарбалық оқу жағдай атары кешенін фундирлеу кластер моделі және әртүрлі деңгейдегі есептер болып табылады. «Проблемалық аймақты» лонгитюдтік зерттеулер оқушылардың тұлғалық ойлауына, мәдениет араралық коммуникацияға, өзбетінше жасампаздық пен өін-өзі ұйымдастыруды тиімді жүзеге асыруға мүмкіндік береді.

Кілітті сөздер: математикалық білім беру, диалог мәдениеті, синергия, фундирлеу кластері, іс-әрекеттің функционалдық сауаттылығы, компьютерлік моделдеу, күрдел есептерді шығару, функцияның шегі.

UDC 372.25

E.I. Smirnov¹, A.L.Zhokhov¹, A.A.Yunusov³, A.A.Yunusova⁴, O.B.Simonova²

¹ K.D. Ushinskiy Yaroslavl State Pedagogical University, Yaroslavl, Russia;

² Kirov Regional State Educational Institution. Russia;

³ KIPUN-Kazakhstan Engineering Pedagogical University of Friendship of Peoples, Shymkent, Republic Of Kazakhstan;

⁴ Eurasian humanitarian Institute, Astana. Republic Of Kazakhstan

VISUAL MODELING OF THE MANIFESTATION OF THE ESSENCE OF MATHEMATICAL CONCEPTS AND METHODOLOGICAL PROCEDURES

Abstract. One of the ways to enhance the effectiveness of mathematical education of schoolchildren is to actualize solutions to complex tasks by adapting modern science. This possibility arises in the identification of "problem areas" of mathematics education and the construction of generalized constructs that are associated with the "problem area". In this article, on the basis of the dialogue of cultures and means of mathematical and computer modeling structured stages of adaptation and technological constructs of actualization synergy in training at the study of the notion of limit of a function. Didactic mechanism of the development of the essence of this construct is the implementation of the model cluster founding, are equipped with the motivation, applied learning situations and tasks at different levels. Longitudinal study of problem areas allows us to effectively develop the intellectual operations of thinking, intercultural communication, creative independence and self-organization of the schoolboy.

Key words: mathematical education, dialogue of cultures, synergy, clusters of a founding, functional literacy activities, computer simulations, solve complex problems, limit of a function.

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 1, Number 317 (2018), 94 – 97

УДК 510.54

Б.С. Калмурзаев¹, Н.А. Баженов²

¹Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан;

²Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия.

birzhan.kalmurzayev@gmail.com, bazhenov@math.nsc.ru

О ВЛОЖИМОСТИ -СТЕПЕНЕЙ В ОТНОШЕНИЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ В ИЕРАРХИИ ЕРШОВА

Аннотация. Работа посвящена исследованию отношений эквивалентности в иерархии Ершова. Отношение эквивалентности R на ω вычислимо сводится к отношению эквивалентности S , если существует вычислимая функция $f(x)$, такая что, для любых x и y условия xRy и $f(x)Sf(y)$ эквивалентны. В данной работе строятся изоморфные вложения полурешёток -степеней в частичные порядки отношений эквивалентности в иерархии Ершова относительно вычислимой сводимости.

Ключевые слова. Отношения эквивалентности, вычислимая сводимость, иерархия Ершова, вычислимо перечислимые множества, полурешетка вычислимо перечислимых m -степеней.

Множество A m -сводится к множеству B (символически, $A \leq_m B$), если существует вычислимая функция f такая, что для любого $x \in \omega$ условия $x \in A$ и $f(x) \in B$ эквивалентны. Здесь функцию f называют сводящей функцией. Говорят, что множество A 1 -сводится к множеству B (символически, $A \leq_1 B$), если $A \leq_m B$ и сводящая функция является взаимно-однозначной. $A \equiv_m B$ обозначает, что $A \leq_m B$ и $B \leq_m A$. m -степень множества A обозначается через $d(A)$, то есть $d(A) = \{B: A \equiv_m B\}$. На множестве -степеней естественный порядок будем обозначать так же \leq_m :

$$d(A) \leq_m d(B) \Leftrightarrow A \leq_m B.$$

Частично упорядоченное множество $L_m^0 = (\{d(X): X - \text{рекурсивно перечислимое множество и } X \neq \emptyset, \omega\}, \leq_m)$ является верхней полурешеткой и идеалом верхней полурешетки всех -степеней. Операция взятия верхней грани в L_m^0 индексируется прямой суммой множеств:

$$A \oplus B \Leftrightarrow \{2x: x \in A\} \cup \{2x + 1: x \in B\}.$$

Хорошо известно, что L_m^0 имеет наибольший и наименьший элементы. Все определения и необходимые сведения по m -сводимости можно найти в книгах [1, 2].

Определение ([6]). Говорят, что множество A принадлежит классу Σ_n^{-1} иерархии Ершова, если существуют вычислимые функции $f(x, t)$ и $h(x, t)$ такие, что для всех $x, t \in \omega$ выполняются следующие условия:

- (1) $A(x) = \lim_s f(x, s)$, причем $f(x, 0) = 0$;
- (2) $h(x, 0) = n$ & $h(x, t + 1) \leq h(x, t)$;
- (3) $f(x, t + 1) \neq f(x, t) \Rightarrow h(x, t + 1) < h(x, t)$.

Пару функций $\langle f, h \rangle$, удовлетворяющих условиям определения, назовем Σ_n^{-1} -аппроксимацией множества A . Говорят, что множество A принадлежит классу Π_n^{-1} иерархии Ершова, если дополнение множества A принадлежит классу Σ_n^{-1} . Множества из класса Σ_n^{-1} (Π_n^{-1}) также называют Σ_n^{-1} -множествами (Π_n^{-1} -множествами). Σ_1^{-1} -множества известны как вычислимо перечислимые множества. Более подробно с результатами про эти множества можно ознакомиться в работах [3, 4, 5, 6].

Классы Σ_n^{-1} и Π_n^{-1} являются замкнутыми вниз по m -сводимости, известно [3], что эти классы имеют универсальные множества. Кроме того, частично упорядоченные множества (Σ_n^{-1}, \leq_m) и (Π_n^{-1}, \leq_m) являются верхними полурешетками.

Предложение 1. Множество $A \in \Sigma_n^{-1}$ тогда и только тогда, когда существует вычислимая функция $h(x, t)$ такая, что для всех $x, t \in \omega$ выполняются следующие условия:

- (1) $A(x) = \text{rest}(\lim_s h(x, s), 2)$;
- (2) $h(x, 0) = 0 \ \& \ h(x, t) \leq h(x, t + 1) \ \& \ h(x, t) \leq n$;

Предложение 2. Множество $A \in \Pi_n^{-1}$ тогда и только тогда, когда существует вычислимая функция $h(x, t)$ такая, что для всех $x, t \in \omega$ выполняются следующие условия:

- (1) $A(x) = \overline{\text{sg}}(\text{rest}(\lim_s h(x, s), 2))$;
- (2) $h(x, 0) = 0 \ \& \ h(x, t) \leq h(x, t + 1) \ \& \ h(x, t) \leq n$;

Считаем, что все рассматриваемые множества и отношения эквивалентности заданы на ω . Для ненулевого $n \in \omega$ через Id_n обозначается вычислимое отношение эквивалентности, заданное по правилу: $x \text{Id}_n y$ в том и только том случае, когда x и y эквивалентны по модулю n . Через Id обозначим тождественное отношение эквивалентности. Для отношения эквивалентности E и $a \in \omega$ через $[a]_E$ обозначается класс эквивалентности элемента a .

Определение. Отношение эквивалентности E на ω называется Σ_n^{-1} -отношением эквивалентности (Π_n^{-1} -отношением эквивалентности) если множество E является Σ_n^{-1} -множеством (Π_n^{-1} -множеством).

Говорят, что отношение эквивалентности R вычислимо сводится к отношению эквивалентности Q (символически, $R \leq_c Q$), если существует вычислимая функция f , для которой $(x, y) \in R$ тогда и только тогда, когда $(f(x), f(y)) \in Q$ при любых $x, y \in \omega$, т.е. существует алгоритм, который транслирует разные классы R -эквивалентности в разные классы Q -эквивалентности. Отношения эквивалентности R и Q называются эквивалентными, если они сводятся друг к другу. Совокупность всех отношений эквивалентности, эквивалентных R , называется степенью отношения эквивалентности R .

Очевидно, что отношение эквивалентности $E \leq_c \text{Id}$ тогда и только тогда, когда $E \equiv_c \text{Id}_n$ для некоторого $n \in \omega$.

Определение (А. Сорби и У.Эндрюс). Отношение эквивалентности E называется *тёмным* (*dark*), если E несравнимо с тождественным отношением эквивалентности относительно сводимости \leq_c .

Для произвольного в.п. множества A пусть $R_A = \{(x, y) : x = y \vee \{x, y\} \subseteq A\}$.

Предложение ([11]). Пусть A, B – непустые в.п. множества.

- 1) R_A – вычислимо тогда и только тогда, когда A – вычислимо.
- 2) Из $A \leq_1 B$ следует $R_A \leq_c R_B$.
- 3) Если $R_A \leq_c R_B$, тогда $A \leq_m B$.

Из этого предложения следует, что в.п. 1-степени можно изоморфно вложить в структуру в.п. отношений эквивалентности. Хорошо известно, что в.п. 1-степени не являются полурешеткой. Следовательно, структуры отношений эквивалентности с вычислимой сводимостью также не являются полурешетками.

В данной работе мы исследуем вложение полурешеток n -степеней в структуры эквивалентностей в иерархии Ершова. О вложениях полурешетки в.п. n -степеней в полурешетки Роджерса можно найти в работах [7, 8, 9, 10]. О вложении в.п. 1-степеней в структуры отношений эквивалентности можно посмотреть в [11, 12].

Вложение полурешеток n -степеней в структуры отношений эквивалентности иерархии Ершова.

Теорема 1. Для любого $n > 0$ полурешетка (Σ_n^{-1}, \leq_m) изоморфно вложима в структуру $(\Pi_{2n}^{-1}$ -отношения эквивалентности, \leq_c).

Доказательство. Рассмотрим следующий оператор: для произвольного множества X положим

$$T(X) = \{(x, y) : \{x, y\} \subseteq X \vee \{x, y\} \subseteq \overline{X}\}$$

Очевидно, что для любого множества X множество $T(X)$ является отношением эквивалентности. Докажем, что отображение $X \rightarrow T(X)$ индуцирует изоморфное вложение верхней полурешетки (Σ_n^{-1}, \leq_m) в структуру $(\Pi_{2n}^{-1}$ -отношения эквивалентности, \leq_c). А также докажем, что наша оценка для уровня иерархии Ершова неупрощаема. Для этого докажем следующие леммы.

Лемма 1. Если $X \in \Sigma_n^{-1}$, тогда $T(X) \in \Pi_{2n}^{-1}$.

Доказательство леммы 1. Пусть пара функций $\langle f_X, h_X \rangle$ – Σ_n^{-1} -аппроксимация множества X . Построим аппроксимацию множества $T(X)$: для любых $x, y \in \omega$ определим

$$\begin{aligned} f((x, y), t) &= |f_X(x, t) + f_X(y, t) - 1|; \\ h((x, y), t) &= h_X(x, t) + h_X(y, t). \end{aligned}$$

Докажем, что пара функций $\langle f, h \rangle$ является Π_{2n}^{-1} -аппроксимацией множества $T(X)$.

1) $f((x, y), 0) = |f_X(x, 0) + f_X(y, 0) - 1| = 1$. И

$$\lim_s f((x, y), s) = |\lim_s f_X(x, s) + \lim_s f_X(y, s) - 1| = |X(x) + X(y) - 1|.$$

Из последнего равенства ясно, что $T(X)(x, y) = 1$ тогда и только тогда, когда $X(x) = X(y)$. Значит, $T(X)(x, y) = 1$ тогда и только тогда, когда $\lim_s f((x, y), s) = 1$.

2) $h((x, y), 0) = h_X(x, 0) + h_X(y, 0) = n + n = 2n$. И $h((x, y), t + 1) = h_X(x, t + 1) + h_X(y, t + 1) \leq h_X(x, t) + h_X(y, t) = h(x, y)$.

3) Пусть $f((x, y), t + 1) \neq f((x, y), t)$. Значит $f_X(x, t + 1) \neq f_X(x, t)$ или $f_X(y, t + 1) \neq f_X(y, t)$. Следовательно, $h_X(x, t + 1) < h_X(x, t)$ или $h_X(y, t + 1) < h_X(y, t)$. А это, в свою очередь означает, что $h((x, y), t + 1) = h_X(x, t + 1) + h_X(y, t + 1) < h_X(x, t) + h_X(y, t) = h((x, y), t)$.

Следовательно, пара функций $\langle f, h \rangle$ является Π_{2n}^{-1} -аппроксимацией множества $T(X)$. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Если $F \leq_c T(X)$ для некоторого Σ_n^{-1} -множества X , то $F \equiv_c T(Y)$ для некоторого Σ_n^{-1} -множества Y .

Доказательство леммы 2. Пусть произвольное отношение эквивалентности $F \leq_c T(X)$ посредством функции f . Отношение эквивалентности $T(X)$ состоит из не более двух классов эквивалентности. Значит, отношение эквивалентности F также состоит из не более двух классов. Следовательно, если $Y = f^{-1}(X)$, то $F = T(Y)$. Лемма 2 доказана.

Лемма 3. $X \leq_m Y$ тогда и только тогда, когда $T(X) \leq_c T(Y)$.

Доказательство леммы 3. Обе сводимости можем осуществить одной и той же функцией. Лемма 3 доказана.

Лемма 4. Для любого Π_{2n}^{-1} -множества A существует Σ_n^{-1} множество B такое, что $A \leq_m T(B)$.

Доказательство леммы 4. Пусть пара функций $\langle f_A, h_A \rangle$ – Π_{2n}^{-1} -аппроксимация множества A . Кроме того, пусть h_A – это функция из предложения 2. Построим Σ_n^{-1} -аппроксимацию множества B следующим образом:

$$\begin{aligned} f_B(2x, t) &= \begin{cases} 1, \text{rest}(h_A(x, t), 4) = 2; \\ 0, \text{в противном случае.} \end{cases} \\ f_B(2x + 1, t) &= \begin{cases} 0, \text{rest}(h_A(x, t), 4) = 0; \\ 1, \text{в противном случае.} \end{cases} \\ \begin{cases} h_B(x, 0) = n; \\ h_B(x, t + 1) = h_B(x, t) - |f_B(x, t + 1) - f_B(x, t)|. \end{cases} \end{aligned}$$

Нетрудно понять, что пара функций $\langle f_B, h_B \rangle$ является Σ_n^{-1} -аппроксимацией множества B . Далее, нетрудно проверить, что $A \leq_m T(B)$ посредством функции $f(x) = (2x, 2x + 1)$. Лемма 4 доказана.

Следствие 1. Если X – m -полное Σ_n^{-1} -множество, то $T(X)$ – m -полное Π_{2n}^{-1} -множество.

Доказательство. Пусть X – m -полное Σ_n^{-1} -множество. Докажем, что для любого Π_{2n}^{-1} -множества A справедливо $A \leq_m T(X)$. Из доказательства теоремы ясно, что найдется Σ_n^{-1} -множество Y такое, что $A \leq_m T(Y)$. И очевидно, что $T(Y) \leq_c T(X)$. Пусть $T(Y) \leq_c T(X)$ посредством функции f , тогда $T(Y) \leq_m T(X)$ посредством функции

$$h((x, y)) = (f(x), f(y)).$$

В силу транзитивности \leq_m -сводимости справедливо $A \leq_m T(X)$.

Следствие 2. Для любого невычислимого множества X отношение эквивалентности $T(X)$ является тёмным.

Следствие 3. Полурешетка вычислимо перечислимых ω -степеней изоморфно вложима в структуру $(\Pi_2^{-1}$ -отношения эквивалентности, \leq_c).

Следствия 2,3 очевидны.

Вопрос. Можно ли изоморфно вложить полурешетку в.п. ω -степеней в структуру в.п. отношений эквивалентности?

Исследования Н.А. Баженова выполнены при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 16-31-60058 мол_a_дк.

Исследования Б.С. Калмурзаева выполнены при финансовой поддержке Комитета науки Республики Казахстан, грант ГФ4/3952. «Отношения эквивалентности, предупорядоченные структуры и алгоритмические сводимости на них, как математическая модель баз данных»

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Роджерс Х., Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. Издательство «МИР» Москва, 1972 г., 624 с.
- [2] Мальцев А.И., Алгоритмы и рекурсивные функции. Издательство «Наука» Москва, 1965 г., 367 с.
- [3] Ершов Ю.Л., Об одной иерархии множеств I, Алгебра и логика, том 7, № 1, 1968 г., с.: 47-74.
- [4] Ершов Ю.Л., Об одной иерархии множеств II, Алгебра и логика, том 7, № 4, 1968 г., с.: 15-47.
- [5] Ершов Ю.Л., Об одной иерархии множеств III, Алгебра и логика, том 9, № 1, 1970 г., с.: 34-51.
- [6] Арсланов М.М., Иерархия Ершова. Казанский государственный университет, 2007 г., 89 с.
- [7] Badaev S.A., TalasbaevaZh.T., Computable numberings in the hierarchy of Ershov, in: S.S. Goncharov (ed.) et al., Mathematical logic in Asia. Proc. 9th Asian logic conf. (Novosibirsk, Russia, August 16-19, 2005), NJ, World Scientific, 2006, 17-30.
- [8] Badaev S.A., Manat M., Sorbi A., Rogers semilattices of families of two embedded sets in the Ershov hierarchy, Mathematical logic quarterly. Vol. 58, No 4-5, 2012, 366-376.
- [9] Калмурзаев Б.С. О вложимости полурешётки L_m^0 в полурешётки Роджерса, Алгебра и логика, том. 55, №3, 2016, с.: 328-340.
- [10] Ершов Ю.Л., Теория нумераций, М., Наука, 1977.
- [11] Su Gao, Peter Gerdes, Computably enumerable equivalence relations, StudiaLogica, 67, 2001, 27-59.
- [12] Andrews U., Lempp S., Miller J.S., Ng K.M., San Mauro L., Sorbi A., Universal computably enumerable equivalence relations, Journal of Symbolic Logic, vol. 79, no. 1, 2014, 60-88.

Б.С. Калмурзаев¹, Н.А. Баженов²

¹аль-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы, Қазақстан;

²РФА СБ С.Л. Соболев автындағы математика институты, Новосибирск, Ресей.

ЕРШОВ ИЕРАРХИЯСЫНДА m -ДЕНГЕЙЛЕРДІҢ ЭКВИВАЛЕНТТІК ҚАТЫНАСТАРҒА ЕНГІЗУЛЕРІ ТУРАЛЫ

Аннотация. Бұл мақала Ершов иерархиясындағы эквиваленттік қатынастарды зерттеуге бағышталған. ω жиынында анықталған R эквиваленттік қатынасы S эквиваленттік қатынасына есептелімді көшіріледі деп атаймыз, егер кез келген x және y элементтері үшін xRy және $f(x)Sf(y)$ шарттары эквивалент болатындай $f(x)$ есептелімді функциясы табылатын болса. Бұл мақалада Ершов иерархиясындағы m -денгейлерді есептелімді көшірулерге байланысты эквиваленттік қатынастардың жартлай ретіне изоморфты енгізулері құрылады.

Кілт сөздер. Эквиваленттік қатынастар, есептелімді көшірулер, Ершов иерархиясы, рекурсив саналымды жиындар, рекурсив саналымды m -денгейлердің жатрыторы.

B.S. Kalmurzayev¹, N.A. Bazhenov²

¹Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan;

²Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk, Russia.

EMBEDDABILITY OF m -DEGREES INTO EQUIVALENCE RELATIONS IN THE ERHOV HIERARCHY

Abstract. The paper is devoted to the study of equivalence relations in the hierarchy of Ershov. An equivalence relation R on ω is computably reducible to an equivalence relation S if there exists a computable function $f(x)$ such that for any x and y , the conditions xRy and $f(x)Sf(y)$ are equivalent. In this paper we construct isomorphic embeddings of semilattices of m -degrees into partial orders of equivalence relations in the hierarchy of Ershov with respect to computable reducibility.

Key words. Equivalence relations, computable reducibility, hierarchy of Ershov, computably enumerable sets, semilattice of computably enumerable m -degrees.

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 1, Number 317 (2018), 98 – 105

УДК 510.67

С.С. Байжанов¹, Б.Ш. Кулпешов²

¹Институт математики и математического моделирования, Алматы;

²Международный университет информационных технологий, Алматы

e-mail: sayan-5225@mail.ru; e-mail: b.kulpeshov@iitu.kz

ОБ ОБОГАЩЕНИИ СЧЕТНО КАТЕГОРИЧНЫХ СЛАБО О-МИНИМАЛЬНЫХ ТЕОРИЙ БИНАРНЫМИ ПРЕДИКАТАМИ

Аннотация. В настоящей работе исследуются вопросы сохранения теоретико-модельных свойств при обогащениях 1-неразличимых счетно категоричных слабо о-минимальных структур произвольным бинарным предикатом. Ранее исследовались вопросы сохранения теоретико-модельных свойств при обогащениях счетно категоричных слабо о-минимальных теорий унарными предикатами. Введено понятие эквивалентность-генерируемой формулы: если $R(x, y)$ – p -стабильная формула для некоторого неалгебраического 1-типа p , то $R(x, y)$ называется эквивалентность-генерируемой формулой, если любая p -стабильная выпуклая вправо или влево формула, образованная из максимальных выпуклых подмножеств множества $R(M, a)$ для некоторого $a \in p(M)$ является эквивалентность-генерирующей. В терминах вновь введенного понятия эквивалентность-генерируемой формулы получен критерий сохранения счетной категоричности 1-неразличимого слабо о-минимального обогащения бинарным предикатом 1-неразличимых счетно категоричных слабо о-минимальных структур ранга выпуклости 1.

Ключевые слова: слабая о-минимальность, счетная категоричность, 1-неразличимость, обогащение моделей, эквивалентность-генерирующая формула, отношение эквивалентности.

Пусть L — счетный язык первого порядка. Всюду в данной статье мы рассматриваем L -структуры и предполагаем что L содержит символ бинарного отношения $<$, который интерпретируется как линейный порядок в этих структурах. Настоящая работа касается понятия *слабой о-минимальности*, первоначально глубоко исследованного Д. Макферсоном, Д. Маркером и Ч. Стейнхорном в [1]. Подмножество A линейно упорядоченной структуры M называется *выпуклым*, если для любых $a, b \in A$ и $c \in M$ всякий раз когда $a < c < b$ мы имеем $c \in A$. *Слабо о-минимальной структурой* называется линейно упорядоченная структура $M = \langle M, =, <, \dots \rangle$ такая, что любое определенное (с параметрами) подмножество структуры M является объединением конечного числа выпуклых множеств в M . Вспомним, что такая структура M называется *о-минимальной*, если каждое определенное (с параметрами) подмножество структуры M является объединением конечного числа интервалов и точек в M . Таким образом, слабая о-минимальность является обобщением о-минимальности. Вещественно замкнутые поля с собственным выпуклым кольцом нормирования обеспечивают важный пример слабо о-минимальных (не о-минимальных) структур.

Пусть A, B — произвольные подмножества линейно упорядоченной структуры M . Тогда выражение $A < B$ означает, что $a < b$ всякий раз когда $a \in A$ и $b \in B$. Выражение $A < b$ означает что $A < \{b\}$. Через A^+ (и соответственно A^-) будем обозначать множество элементов b рассматриваемой структуры с условием $A < b$ ($b < A$).

Определение 1[2] Пусть T — слабо o -минимальная теория, M — достаточно насыщенная модель теории T , и пусть $\phi(x)$ — произвольная M -определимая формула с одной свободной переменной.

Ранг выпуклости формулы $\phi(x)$ ($RC(\phi(x))$) определяется следующим образом:

1) $RC(\phi(x)) \geq 1$, если $\phi(M)$ бесконечно.

2) $RC(\phi(x)) \geq \alpha + 1$, если существуют параметрически определенное отношение эквивалентности $E(x, y)$ и бесконечное число элементов $b_i, i \in \omega$, такие, что:

• Для любых $i, j \in \omega$, всякий раз когда $i \neq j$ мы имеем $M \models \neg E(b_i, b_j)$

• Для каждого $i \in \omega$ $RC(E(x, b_i)) \geq \alpha$ и $E(M, b_i)$ — выпуклое подмножество множества $\phi(M)$

3) $RC(\phi(x)) \geq \delta$, если $RC(\phi(x)) \geq \alpha$ для всех $\alpha \leq \delta$ (δ предельный).

Если $RC(\phi(x)) = \alpha$ для некоторого α , то мы говорим что $RC(\phi(x))$ определяется. В противном случае (т.е. если $RC(\phi(x)) \geq \alpha$ для всех α), мы полагаем $RC(\phi(x)) = \infty$.

В частности, теория имеет ранг выпуклости 1, если не существует определенного (с параметрами) отношения эквивалентности с бесконечным числом выпуклых бесконечных классов.

В настоящей работе мы исследуем вопрос сохранения свойств при обогащениях моделей счетно категоричных слабо o -минимальных теорий бинарными предикатами. Ранее в работах [3] – [5] нами был исследован вопрос сохранения свойств при обогащениях моделей счетно категоричных слабо o -минимальных теорий унарными предикатами. Как известно, в работе [6] Байжанов Б.С. доказал что обогащение модели слабо o -минимальной теории унарным предикатом, выделяющим конечное число выпуклых множеств, сохраняет слабую o -минимальность обогащенной теории. Однако в случае обогащения модели слабо o -минимальной теории бинарным предикатом, выделяющим при каждом фиксированном как первом, так и втором параметре, конечное число выпуклых множеств, обогащенная теория может потерять слабую o -минимальность (Пример 4).

Вспомним некоторые понятия, первоначально введенные в [1].

Пусть $Y \subset M^{n+1}$ — \emptyset -определимое множество, пусть $\pi: M^{n+1} \rightarrow M^n$ — проекция, которая отбрасывает последнюю координату, и пусть $Z := \pi(Y)$. Для каждого $\bar{a} \in Z$ пусть $Y_{\bar{a}} := \{y : (\bar{a}, y) \in Y\}$. Предположим что для каждого $\bar{a} \in Z$ множество $Y_{\bar{a}}$ ограничено сверху, но не имеет супремума в M . Пусть \sim — \emptyset -определимое отношение эквивалентности на M^n , определяемое следующим образом:

$$\bar{a} \sim \bar{b} \text{ для всех } \bar{a}, \bar{b} \in M^n \setminus Z, \text{ и } \bar{a} \sim \bar{b} \Leftrightarrow \sup Y_{\bar{a}} = \sup Y_{\bar{b}}, \text{ если } \bar{a}, \bar{b} \in Z.$$

Пусть $\bar{Z} := Z/\sim$, и для каждого кортежа $\bar{a} \in Z$ мы обозначаем через $[\bar{a}]$ \sim -класс кортежа \bar{a} .

Существует естественный \emptyset -определимый линейный порядок на $M \cup \bar{Z}$, определяемый следующим образом. Пусть $\bar{a} \in Z$ и $c \in M$. Тогда $[\bar{a}] < c$ тогда и только тогда, когда $w < c$ для всех $w \in Y_{\bar{a}}$. Если неверно что $\bar{a} \sim \bar{b}$, то существует некоторый $x \in M$ такой, что $[\bar{a}] < x < [\bar{b}]$ или $[\bar{b}] < x < [\bar{a}]$, и поэтому $<$ индуцирует линейный порядок на $M \cup \bar{Z}$. Мы называем такое множество \bar{Z} сортом (в данном случае, \emptyset -определимым сортом) в \bar{M} , где \bar{M} — Дедекиндово пополнение структуры M , и рассматриваем \bar{Z} как естественно вложенную в \bar{M} . Аналогично мы можем получить сорт в \bar{M} , рассматривая инфимумы вместо супремумов.

Определение 2[1] Пусть M — линейно упорядоченная структура, $D \subseteq M$ — бесконечное множество, $K \subseteq \bar{M}$, $f: D \rightarrow K$ — функция. Будем говорить, что f является локально возрастающей (локально убывающей, локально константой) на D , если для любого $x \in D$

существует бесконечный интервал $J \subseteq D$, содержащий x , так что f является строго возрастающей (строго убывающей, константой) на J .

Будем также говорить, что функция f является *локально монотонной* на множестве $D \subseteq M$, если f является либо локально возрастающей, либо локально убывающей на D .

Предложение 3[7] Пусть M — слабо о-минимальная структура, $A \subseteq M$, $p \in S_1(A)$ — неалгебраический тип. Тогда любая функция в A -определимый сорт, область определения которой содержит множество $p(M)$, является локально монотонной или локально константой на $p(M)$.

Пример 4 Пусть $M := \langle \mathbb{R}, < \rangle$ — линейно упорядоченная структура на множестве вещественных чисел \mathbb{R} . Очевидно что M — модель счетно категоричной о-минимальной теории. Обогадим модель M новым бинарным отношением $S(x, y)$ следующим образом: пусть $M' := \langle \mathbb{R}, <, S^2 \rangle$ так что $S(x, y)$ является графиком следующей унарной функции f , определяемой как $f(b) = 2b$ для каждого $b \in \mathbb{Q}$ и $f(c) = -c$ для каждого $c \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Очевидно что для каждого $a \in M$ $S(a, M)$ и $S(M, a)$ являются одноэлементными множествами, т.е. выпуклыми множествами. Тем не менее, замечаем что M' не является слабо о-минимальной структурой, поскольку не существует разбиения множества \mathbb{R} на конечное число выпуклых множеств, на каждом из которых определяемая функция f была бы локально монотонной или локально константой.

Пример 5 Пусть $M := \langle \mathbb{Q}, < \rangle$ — линейно упорядоченная структура на множестве рациональных чисел \mathbb{Q} . Очевидно что M — счетно категоричная о-минимальная структура. Обогадим модель M новым бинарным отношением $E(x, y)$ следующим образом: пусть $M' := \langle \mathbb{Q}, <, E^2 \rangle$ так что для любых $a, b \in \mathbb{Q}$

$$E(a, b) \Leftrightarrow (2n-1)\sqrt{2} < a, b < (2n+1)\sqrt{2}$$

для некоторого $n \in \mathbb{Z}$.

Тогда нетрудно понять, что $E(x, y)$ — отношение эквивалентности, разбивающее \mathbb{Q} на бесконечное число бесконечных выпуклых классов, причем E -классы упорядочены по типу $\omega^* + \omega$.

Может быть доказано, что M' — слабо о-минимальная структура, но $Th(M')$ не является счетно категоричной.

Пример 6 Пусть $M := \langle \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}, <, E^2 \rangle$ — линейно упорядоченная структура на множестве $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, упорядоченном лексикографически. Отношение $E(x, y)$ определяется следующим образом: для любых $a = (m_1, n_1), b = (m_2, n_2) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ $E(a, b) \Leftrightarrow m_1 = m_2$.

Очевидно, что $E(x, y)$ — отношение эквивалентности, разбивающее $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ на бесконечное число бесконечных выпуклых классов, причем E -классы упорядочены по типу \mathbb{Q} .

Расширим основное множество $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ структуры M добавлением к каждому E -классу двух элементов, являющихся левой и правой концевыми точками E -класса. В результате получим новую структуру $M' := \langle M', <, E^2 \rangle$. Рассмотрим обеднение структуры M' до структуры $M'' := \langle M', < \rangle$. Очевидно что M'' — счетно категоричная о-минимальная структура. Ее обогащение $M' := \langle M', <, E^2 \rangle$ является счетно категоричной линейно упорядоченной структурой, но $Th(M')$ не является слабо о-минимальной.

Определение 7[8] Пусть M — слабо о-минимальная структура, $A \subseteq M$, $M \models |A|^+$ -насыщенна, $p \in S_1(A)$ — неалгебраический.

(1) A -определимая формула $F(x, y)$ называется p -стабильной, если существуют $\alpha, \gamma_1, \gamma_2 \in p(M)$ такие, что $F(M, \alpha) \setminus \{\alpha\} \neq \emptyset$ и $\gamma_1 < F(M, \alpha) < \gamma_2$.

(2) p -стабильная формула $F(x, y)$ называется *выпуклой вправо (влево)*, если существует $\alpha \in p(M)$ такой, что $F(M, \alpha)$ выпукло, α — левая (правая) концевая точка множества $F(M, \alpha)$ и $\alpha \in F(M, \alpha)$.

В Примере 5 формула $F(x, y) := y \leq x \wedge E(x, y)$ является p -стабильной выпуклой вправо, а формула $G(x, y) := y \geq x \wedge E(x, y)$ является p -стабильной выпуклой влево, где $p(x) := \{x = x\} \in S_1(\emptyset)$.

Пусть $F_1(x, y), F_2(x, y)$ — p -стабильные выпуклые вправо (влево) формулы. Будем говорить, что $F_2(x, y)$ *больше чем* $F_1(x, y)$, если существует $\alpha \in p(M)$ такой, что $F_1(M, \alpha) \subset F_2(M, \alpha)$.

Определение 8[9] Будем говорить, что p -стабильная выпуклая вправо (влево) формула $F(x, y)$ является *эквивалентность-генерирующей*, если для любых $\alpha, \beta \in p(M)$ таких, что $M \models F(\beta, \alpha)$, имеет место следующее:

$$M \models \forall x (x \geq \beta \rightarrow (F(x, \alpha) \leftrightarrow F(x, \beta))) \left(M \models \forall x (x \leq \beta \rightarrow (F(x, \alpha) \leftrightarrow F(x, \beta))) \right)$$

Лемма 9[9] Пусть M — слабо о-минимальная структура, $A \subseteq M$, $p \in S_1(A)$ — неалгебраический, $M \models |A|^+$ -насыщенна. Предположим что $F(x, y)$ — p -стабильная выпуклая вправо (влево) формула, являющаяся эквивалентность-генерирующей. Тогда

1) $G(x, y) := F(y, x)$ — p -стабильная выпуклая влево (вправо) формула, являющаяся также эквивалентность-генерирующей.

2) $E(x, y) := F(x, y) \vee F(y, x)$ — отношение эквивалентности, разбивающее $p(M)$ на бесконечное число бесконечных выпуклых классов.

Предложение 10[9] Пусть T — счетно категоричная слабо о-минимальная теория, $M \models T$, $A \subseteq M$, $p \in S_1(A)$ — неалгебраический. Тогда любая p -стабильная выпуклая вправо (влево) формула является эквивалентность-генерирующей.

Пример 11 Пусть $M := \langle \mathbb{Q}, < \rangle$ — линейно упорядоченная структура на множестве рациональных чисел \mathbb{Q} . Очевидно что M — счетно категоричная 1-неразличимая о-минимальная структура. Рассмотрим обогащение структуры M новым бинарным отношением $R(x, y)$: пусть $M' := \langle \mathbb{Q}, <, R^2 \rangle$ так что для любых $a, b \in \mathbb{Q}$

$$R(a, b) \Leftrightarrow a \leq b < a + \sqrt{2}.$$

Очевидно что $R(a, M')$ и $R(M', a)$ выпуклы для каждого $a \in M'$. Может быть доказано что M' — 1-неразличимая слабо о-минимальная структура.

Формула $F(x, y) := R(y, x)$ является p -стабильной выпуклой вправо, где $p(x) := \{x = x\} \in S_1(\emptyset)$. Нетрудно понять, что $F(x, y)$ не является эквивалентность-генерирующей.

Рассмотрим следующие формулы:

$$R_2(x, y) := \exists t [R(x, t) \wedge R(t, y)], \quad R_n(x, y) := \exists t [R_{n-1}(x, t) \wedge R(t, y)], \quad n \geq 2$$

Для каждого $a \in M'$ мы имеем

$$R(a, M') \subset R_2(a, M') \subset \dots \subset R_n(a, M') \subset \dots,$$

откуда получаем, что $Th(M')$ не является счетно категоричной.

Пусть M — слабо о-минимальная структура, $A \subseteq M$, $p \in S_1(A)$ — неалгебраический, $R(x, y)$ — A -определимая формула, являющаяся p -стабильной, т.е. для любого $a \in p(M)$ существуют $b_1, b_2 \in p(M)$ такие, что $b_1 < R(M, a) < b_2$.

В силу слабой о-минимальности M множество $R(M, a)$ является объединением конечного числа выпуклых множеств. Очевидно что каждое из этих множеств является $A \cup \{a\}$ -определимым. Существует конечное число таких определимых выпуклых множеств, находящихся левее элемента a . Обозначим их через $R_1^l(x, y), \dots, R_s^l(x, y)$, при этом будем считать что

$$R_s^l(M, a) > R_{s-1}^l(M, a) > \dots > R_1^l(M, a) \geq a.$$

Аналогично существует конечное число определимых выпуклых множеств, находящихся правее элемента a . Обозначим их через $R_1^r(x, y), \dots, R_m^r(x, y)$, при этом будем считать что

$$a \leq R_1^r(M, a) < R_2^r(M, a) < \dots < R_m^r(M, a).$$

Возможно существует определимое выпуклое множество, внутренность которого содержит элемент a . Обозначим его через $R^c(x, y)$. Таким образом, если $R^c(M, a) \neq \emptyset$, то существуют $b_1, b_2 \in R^c(M, a)$ такие, что $b_1 < a < b_2$.

Определим следующие формулы:

$$F^c(x, y) := y \leq x \wedge R^c(x, y)$$

$$G^c(x, y) := y \geq x \wedge R^c(x, y)$$

$$F_i^r(x, y) := y \leq x \wedge \forall t [R_i^r(t, y) \rightarrow x < t], 1 \leq i \leq m$$

$$F_i^{r*}(x, y) := y \leq x \wedge \exists t [R_i^r(t, y) \wedge x \leq t], 1 \leq i \leq m$$

$$G_j^l(x, y) := y \geq x \wedge \forall t [R_j^l(t, y) \rightarrow t < x], 1 \leq j \leq s$$

$$G_j^{l*}(x, y) := y \geq x \wedge \exists t [R_j^l(t, y) \wedge t \leq x], 1 \leq j \leq s$$

Очевидно что формулы $F^c(x, y), F_i^r(x, y), F_i^{r*}(x, y), 1 \leq i \leq m$, являются p -стабильными выпуклыми вправо, а формулы $G^c(x, y), G_j^l(x, y), G_j^{l*}(x, y), 1 \leq j \leq s$, являются p -стабильными выпуклыми влево.

Будем говорить, что формула $R(x, y)$ является эквивалентность-генерируемой, если каждая нетривиальная формула из множества $\Delta := \{F^c(x, y), F_i^r(x, y), F_i^{r*}(x, y), G^c(x, y), G_j^l(x, y), G_j^{l*}(x, y) | 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq s\}$ является эквивалентность-генерирующей.

Пример 12 Пусть $M := \langle \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}, < \rangle$ - линейно упорядоченная структура на множестве $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, упорядоченным лексикографически. Очевидно что M - счетно категоричная о-минимальная структура.

Введем следующие две бинарные формулы $E(x, y)$ и $R_1(x, y)$ на множестве $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$: для любых $a = (m_1, n_1), b = (m_2, n_2) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$

$$E(a, b) \Leftrightarrow m_1 = m_2$$

$$R_1(a, b) \Leftrightarrow m_1 = m_2 \wedge n_1 \leq n_2 < n_1 + \sqrt{2}$$

Пусть $R(x, y) := y \leq x \wedge E(x, y) \wedge \neg R_1(x, y)$ и $M' := \langle \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}, <, R^2 \rangle$ — обогащение модели M бинарным предикатом $R(x, y)$. Очевидно что для любого $a \in M'$ $R(M', a)$ выпукло и $a < R(M', a)$.

Может быть установлено, что M' - 1-неразличимая слабо о-минимальная структура, однако $Th(M')$ не является счетно категоричной.

Рассмотрим следующие формулы:

$$F_1(x, y) := y \leq x \wedge \forall t [R(t, y) \rightarrow x < t]$$

$$F_2(x, y) := y \leq x \wedge \exists t [R(t, y) \wedge x \leq t]$$

Формулы $F_1(x, y), F_2(x, y)$ являются p - стабильными выпуклыми вправо, где $p(x) := \{x = x\} \in S_1(\emptyset)$, при этом $F_2(x, y)$ - эквивалентность-генерирующая, а $F_1(x, y)$ не является эквивалентность-генерирующей. Следовательно, предикат $R(x, y)$ не является эквивалентность-генерируемым.

Теорема 13 Пусть M - 1-неразличимая счетно категоричная слабо о-минимальная структура ранга выпуклости 1, M' - 1-неразличимое слабо о-минимальное обогащение структуры M бинарным предикатом $R(x, y)$.

Тогда $Th(M')$ - счетно категорична \Leftrightarrow когда выполнены следующие условия:

(1) $R(x, y)$ и $L(x, y) := R(y, x)$ - эквивалентность-генерируемые;

(2) Для каждого \emptyset -определимого отношения эквивалентности $E(x, y)$, порожденного предикатом $R(x, y)$, множество E -классов является плотно упорядоченным.

Доказательство Теоремы 13. (\Rightarrow) Предположим что $Th(M')$ - счетно категорична. Рассмотрим предикат $R(x, y)$. В силу слабой о-минимальности структуры M' для любого $a \in M'$ $R(M', a)$ и $R(a, M')$ есть объединения конечного числа выпуклых множеств. В силу Предложения 10 обе формулы $R(x, y)$ и $L(x, y)$ должны быть эквивалентность-генерируемыми.

Пусть $E(x, y)$ - произвольное \emptyset -определимое отношение эквивалентности. В силу 1-неразличимости множество E -классов должно быть либо плотно упорядочено без конечных точек, либо дискретно упорядочено без конечных точек. Откуда в силу счетной категоричности множество E -классов должно быть плотно упорядочено.

(\Leftarrow) Пусть $R(x, y)$ и $L(x, y)$ — эквивалентность-генерируемые формулы. Рассмотрим $E^*(x, y)$ — произвольное \emptyset -определимое отношение эквивалентности, порожденное предикатом $R(x, y)$. По условию множество E^* -классов плотно упорядочено. В силу 1-неразличимости не существует ни крайнего левого E^* -класса, ни крайнего правого E^* -класса. Также в силу 1-неразличимости не существует E^* -класса, имеющего хотя бы одну конечную точку (если каждый E^* -класс имел бы хотя бы одну конечную точку, то получили бы противоречие со слабой о-минимальностью M').

В силу слабой о-минимальности структуры M' для любого $a \in M'$ $R(M', a)$ и $R(a, M')$ есть объединения конечного числа выпуклых множеств. Поэтому существует лишь конечное число формул вида $F^c(x, y)$, $F_i^r(x, y)$, $F_i^{r*}(x, y)$, $G^c(x, y)$, $G_j^l(x, y)$, $G_j^{l*}(x, y)$, $1 \leq i \leq n_1$, $1 \leq j \leq n_2$ для некоторых $n_1, n_2 < \omega$. Поскольку по условию $R(x, y)$, $L(x, y)$ — эквивалентность-

генерируемые формулы, то каждая нетривиальная формула из списка $\Delta := \{F^c(x, y), F_i^r(x, y), F_i^{r*}(x, y), G^c(x, y), G_j^l(x, y), G_j^{l*}(x, y) \mid 1 \leq i \leq n_1, 1 \leq j \leq n_2\}$ порождает отношение эквивалентности. Таким образом, получаем лишь конечное число \emptyset -определимых отношений эквивалентности, порождаемых предикатом $R(x, y)$.

Пусть $\{E_1(x, y), E_2(x, y), \dots, E_n(x, y)\}$ — полный список \emptyset -определимых отношений эквивалентности, порождаемых предикатом $R(x, y)$. В силу 1-неразличимости не существуют i, j такие, что $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq n$ и для некоторого $a \in M'$ $E_i(a, M') \subset E_j(a, M')$, $\sup E_j(a, M') = \sup E_i(a, M')$ или $\inf E_i(a, M') = \inf E_j(a, M')$.

Также не существуют $i, j \in \{1, \dots, n\}$ такие, что для некоторого $a \in M'$ $E_i(a, M') \setminus E_j(a, M') \neq \emptyset$ и $E_j(a, M') \setminus E_i(a, M') \neq \emptyset$.

Далее, для любых $1 \leq i, j \leq n$ если существует $a \in M'$ такой, что $E_i(a, M') \subseteq E_j(a, M')$, то для любого $a \in M'$ $E_i(a, M') \subseteq E_j(a, M')$. Таким образом, существует $1 \leq m \leq n$ (возможна ситуация когда для некоторых $i, j \in \{1, \dots, n\}$ $E_i(a, M') = E_j(a, M')$) и возможно некоторая перенумерация имеющихся отношений эквивалентности таким образом чтобы для любого $a \in M'$ мы имели бы

$$E_1(a, M') \subset E_2(a, M') \subset \dots \subset E_m(a, M').$$

Так как по условию множество E -классов плотно упорядочено для каждого \emptyset -определимого отношения эквивалентности $E(x, y)$, то E_i -подклассы каждого E_{i+1} -класса плотно упорядочены без конечных точек, где $0 \leq i \leq m$ и

$$E_0(x, y) := x = y, \quad E_{m+1}(x, y) := x = x \wedge y = y.$$

Далее можно установить стандартными методами, что $Th(M')$ допускает элиминацию кванторов с точностью до атомных формул и формул $E_i(x, y)$, $1 \leq i \leq m$, откуда получаем, что $Th(M')$ — счетно категорична.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Macpherson H.D., Marker D. and Steinhorn C. Weakly o-minimal structures and real closed fields, Transactions of The American Mathematical Society, volume 352 (2000), pp. 5435–5483.
- [2] Kulpeshov B.Sh. Weakly o-minimal structures and some of their properties, The Journal of Symbolic Logic, volume 63 (1998), pp. 1511–1528.
- [3] Байжанов С.С., Кулпешов Б.Ш., Инвариантные свойства при обогащениях моделей вполне о-минимальных теорий, Известия Национальной Академии наук Республики Казахстан, серия физико-математическая, № 1 (311), 2017, С. 65-71.
- [4] Байжанов С.С., Кулпешов Б.Ш., Обогащение моделей вполне о-минимальных теорий унарными предикатами, Тезисы докладов ежегодной научной апрельской конференции Института математики и математического моделирования КН МОН РК, Алматы, 2017, С. 16-18.
- [5] Байжанов С.С., Кулпешов Б.Ш., Обогащение моделей счетно категоричных слабо о-минимальных теорий унарными предикатами, Тезисы международной конференции ”Актуальные проблемы чистой и прикладной математики”, посвященной 100-летию академика Тайманова А.Д., Алматы, 2017, С. 13-15.
- [6] Baizhanov B.S. Expansion of a model of a weakly o-minimal theory by a family of unary predicates, The Journal of Symbolic Logic, volume 66 (2001), pp. 1382–1414.
- [7] Kulpeshov B.Sh. Countably categorical quite o-minimal theories, Journal of Mathematical Sciences, volume 188, issue 4 (2013), pp. 387–397.

[8] Baizhanov B.S. One-types in weakly o-minimal theories, Proceedings of Informatics and Control Problems Institute, Almaty, 1996, pp. 75–88.

[9] Baizhanov B.S., Kulpeshov B.Sh. On behaviour of \mathcal{L} -formulas in weakly o-minimal theories, Mathematical Logic in Asia, Proceedings of the 9th Asian Logic Conference (editors S. Goncharov, R. Downey, H. Ono), Singapore, World Scientific, 2006, pp. 31–40.

С.С. Байжанов¹, Б.Ш. Кулпешов²

¹Математика және математикалық модельдеу институты, Алматы, Қазақстан;

²Халықаралық ақпараттық технологиялар университеті, Алматы, Қазақстан,

БИНАРЛЫ ПРЕДИКАТТАРМЕН ЕСЕПТІК-КАТЕГОРИЯЛЫҚ БОСАҢ О-МИНИМАЛДЫҚ ТЕОРИЯЛАР БАЙЫТУ ТУРАЛЫ

Аннотация. Осы жұмыста кез келген бинарлы предикатпен 1-анықталмалы есептік-категориялық босаң о-минималды құрылымдар байыту кезінде теориятикалық-модельдік қасиеттерді сақталу сұрақтары зерттеленеді. Осының алдында унарлы предикаттармен есептік-категориялық босаң о-минималды теорияларды байыту кезінде теориятикалық-модельдік қасиеттерді сақталу сұрақтары зерттеленді. Эквиваленттік-қалыптасқан формула түсінігі енгізілді: егер $R(x, y)$ – кейбір алгебралық емес 1-тип p үшін p -стабильді формула болса, онда $R(x, y)$ эквиваленттік-қалыптасқан формула деп аталады егер кез келген p -стабильді оң жаққа қарай дөңесті немесе сол жаққа қарай дөңесті формуласы $R(M, a)$ жиынтығының максималды дөңес шекарасынан қалыптастырылған кейбір $a \in p(M)$ эквиваленттік-өрнекті болады. Енгізілген эквиваленттік-қалыптасқан формула түсінік терминдермен дөңестік рангісі 1 1-анықталмалы есептік-категориялық босаң о-минималды құрылымдарды 1-анықталмалы босаң о-минималды байытында есептік категориялықты сақтау критерийі алынды.

Кілт сөздер: босаң о-минималдық, есептік категориялық, 1-анықталмаушылық, модельдер байыту, эквиваленттік-өрнекті формула, эквиваленттік қатынасы.

UDC 510.67

S.S. Baizhanov¹, B.Sh. Kulpeshov²

¹Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan, e-mail: sayan-5225@mail.ru;

²International Information Technology University, Almaty, Kazakhstan, e-mail: b.kulpeshov@iitu.kz

ON EXPANDING COUNTABLY CATEGORICAL WEAKLY O-MINIMAL THEORIES BY BINARY PREDICATES

Abstract. In the present work, questions of preservation of model-theoretical properties at expanding a model of a 1-indiscernible countably categorical weakly o-minimal theory by an arbitrary binary predicate are studied. Questions of preservation of model-theoretical properties at expanding of countably categorical weakly o-minimal theories by unary predicates had been before studied. Here the notion of an equivalence-generatable formula has been introduced: if $R(x, y)$ is a p -stable formula for some non-algebraic 1-type p , then $R(x, y)$ is called an equivalence-generatable formula if every p -stable convex to the right or convex to the left formula formed from maximal convex subsets of the set $R(M, a)$ for some element $a \in p(M)$ is equivalence-generating. In terms of the introduced notion of an equivalence-generatable formula, a criterion for preserving the countable categoricity of a 1-indiscernible weakly o-minimal expansion by a binary predicate of 1-indiscernible countably categorical weakly o-minimal structures having the convexity rank 1 has been obtained.

Keywords: weak o-minimality, countable categoricity, 1-indiscernibility, expansion of models, equivalence-generating formula, equivalence relation.

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 1, Number 317 (2018), 106 – 113

УДК 539.3

А.С. Жумаханова¹, М.О. Ногайбаева², А. Аскарлова³,
М.Т. Аршидинова³, К.Б. Бегалиева³, А.К. Кудайкулов³, А.А. Ташев³

¹Kazakh agrarian-technical University named S.Seifullin, Astana, Kazakhstan;

²Институт механики и машиноведения имени академика У.А.Джолдасбекова;

³Институт информационных и вычислительных технологий КН МОН РК

E-mail: zhuldyz_tm@mail.ru, kzldkz@gmail.com, kmiraj82@mail.ru

**АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О УСТАНОВИВШЕГОСЯ
ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ СТЕРЖНЯ ОГРАНИЧЕННОЙ
ДЛИНЫ ПРИ ОДНОВРЕМЕННОМ НАЛИЧИИ КОНЦЕВЫХ ТЕМПЕРАТУР
И БОКОВЫХ ТЕПЛООБМЕНА**

Аннотация. В данной статье рассматриваются проблемы численного изучения термомеханического состояния стержней. На основе фундаментального закона об изменении количества тепла, прошедшее за время dt через фиксированного сечения строится уравнение установившегося теплопроводности для горизонтального стержня ограниченной длины и постоянного поперечного сечения.

При этом на двух концах исследуемого стержня заданы разные температуры, а через боковой поверхности происходит теплообмен с окружающей ее средой. Кроме того, исследуемый стержень выполнен из термозащитного материала ANV-300. Определяющийся закон распределения температуры, всех соответствующих деформации и напряжений а также перемещения по длине исследуемого стержня. Вычисляются величины термического удлинения и возникающего осевого усилия.

В сложной термической зоне работают подшипниковые компоненты реактивных и водородных двигателей, атомных и тепловых электростанций, технологических линий перерабатывающих производств, а также двигателей внутреннего сгорания. Надежная работа этих конструкций будет зависеть от условий термоздс компонентов подшипника. Поэтому это исследование посвящено численному изучению состояния термоздс несущих компонентов конструкций в виде стержней ограниченной длины, ограниченных с обоих концов.

Предлагаемый вычислительный алгоритм основан на принципе сохранения энергии. При этом все типы интегралов в функциональных формулах энергии интегрируются аналитически. При этом полученные численные решения будут иметь высокую точность.

Ключевые слова: тепловой поток, теплообмен, теплопроводности, теплообмена, теплоизоляция.

3. Постановка задачи

Рассматривается горизонтальный стержень ограниченной длины и постоянного поперечного сечения, площадь которого $F(\text{см}^2)$. Ось ox стержня направим слева в право которая совпадает с осью стержня. На левом конце стержня задана температура $T_1 [c^0]$, а направом $T_2 [c^0]$. При этом $T_1 > T_2$. Через боковой поверхности стержня происходит теплообмен с окружающей ее средой. При этом коэффициент теплообмена $h \left[\frac{\text{Вт}}{\text{см}^2 \cdot c^0} \right]$, а температура окружающей среды $T_{oc} [c^0]$. Расчетная схема исследуемого процесса приводится на рисунке 1.

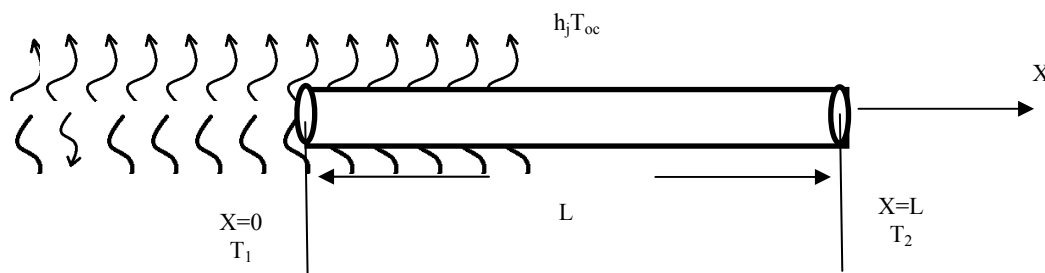


Рисунок 1 - Расчетная схема задачи

Требуется определить:

- 1) Закон распределения температуры по длине исследуемого стержня.
- 2) Определить величину термического удлинения исследуемого стержня.

В случае заземления двух концов стержня необходимо определить:

- 3) Возникающее осевое усилие.
- 4) Поле распределения составляющих деформаций и напряжений.
- 5) Поле распределения перемещения.

Физико-механические свойства материала исследуемого стержня характеризуются коэффициентами теплопроводности $K_{xx} \left[\frac{\text{Вт}}{\text{см}\cdot\text{с}^0} \right]$, теплового расширения $\alpha \left[\frac{1}{\text{с}^0} \right]$ и модулем упругости $E \left[\frac{\text{кг}}{\text{см}^2} \right]$. Если учесть, что исследуемый процесс установившегося, а также значение коэффициента теплопроводности материала стержня гораздо больше чем площадь поперечного сечения, то можно без существенной ошибки пренебречь температурными градиентами в направлениях перпендикулярных к оси стержня, и принять температуру постоянной в каждой точке поперечного сечения, перпендикулярного оси ox . При таком допущении температура с функцией только одного независимого переменного x , и поле распределения температуры по длине стержня может быть описано обыкновенным дифференциальным уравнением.

Согласно фундаментального закона теплофизики, количества тепла, проходящего за время dt через сечения стержня, находящегося на расстоянии x [см] от его левого конца будет

$$-K_{xx}F \frac{dT}{dx} d\tau \quad (1)$$

где $T(x)$ – поле распределения температуры, которая пока неизвестна.

В то время количество тепла, прошедшее за время dt через сечение, находящегося на расстоянии $x + dx$ [см] от левого конца стержня, будет равно

$$-K_{xx}F \left(\frac{dT}{dx} + \frac{d^2T}{dx^2} dx \right) d\tau \quad (2)$$

Кроме того участок стержня, заключенный между сечениями, отстоящими от левого конца стержня на расстоянии x и $x + dx$ [см], вследствие процесса теплопроводности, приобретает за время dt количество тепла, равное разности указанных количеств (1) и (2), т.е.

$$K_{xx}F \frac{d^2T}{dx^2} d\tau \quad (3)$$

Также следует отметить, что за это же время через боковую поверхность этого участка происходит потеря тепла равное

$$hPdx(T - T_{oc})d\tau \quad (4)$$

где P [см] – периметр поперечного сечения.

Но так как исследуемый нами процесс является установившимся, т.е. стационарным, то из(3-4) имеем

$$K_{xx}F \frac{d^2T}{dx^2} dx d\tau = hPdx(T - T_{oc})d\tau \quad (5)$$

Отсюда для рассматриваемой задачи определим уравнение установившейся теплопроводности

$$\frac{d^2T}{dx^2} = \frac{hP(T - T_{oc})}{K_{xx}F} \quad (6)$$

Для дальнейшего удобства введем обозначения

$$a^2 = \frac{hP}{K_{xx}F} \quad (7)$$

учитывая, что температура окружающей среды $T_{oc} = const, 0 \leq x \leq l$, то имеем

$$\frac{d(T-T_{oc})}{dx} = \frac{dt}{dx} \quad (8)$$

отсюда также получим

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = \frac{d^2(T-T_{oc})}{dx^2}, 0 \leq x \leq l \quad (9)$$

Учитывая (7) и (9) перепишем (6)

$$\frac{d^2(T-T_{oc})}{dx^2} - a^2(T-T_{oc}) = 0 \quad (10)$$

Это уравнение является обыкновенным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами. Тогда его общий интеграл будет

$$T - T_{oc} = C_1 e^{ax} + C_2 e^{-ax}, \quad 0 \leq x \leq l \quad (11)$$

Где C_1 и C_2 являются постоянными интегрирования. Их значения определяются из граничных условий в концах стержня.

$$T(x=0) = T_1[c^0]; T(x=l) = T_2[c^0]; \quad (12)$$

$$\left. \begin{aligned} T_1 - T_{oc} &= C_1 + C_2 \\ T_2 - T_{oc} &= C_1 e^{al} + C_2 e^{-al} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Из этих систем определяются значения C_1 и C_2 .

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= \frac{(T_2 - T_{oc}) - (T_1 - T_{oc})e^{-al}}{2sh(al)} \\ C_2 &= \frac{(T_1 - T_{oc})e^{al} - (T_2 - T_{oc})}{2sh(al)} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Подставляя (14) в (11) определяется поле распределения температуры по длине исследуемого стержня с учетом условий эксплуатации [2]

$$T(x, h, K_{xx}, P, F, T_{oc}) = T_{oc} + \frac{(T_2 - T_{oc})sh(ax) + (T_1 - T_{oc})sha(l-x)}{sh(al)}, 0 \leq x \leq l \quad (15)$$

На основе фундаментальной теории теплофизики можно определить величину удлинения рассматриваемого стержня если он заземлен одним концом, а другой свободен

$$\Delta l_T = \int_0^l \alpha T(x) dx = \alpha \int_0^l T(x) dx = \alpha \left\{ T_{oc} l + \left[(T_2 - T_{oc})(ch(al) - 1)/a - (T_1 - T_{oc})(1 - ch(al)/a) \right] / sh(al) \right\} \quad (16)$$

В случае если обе концы стержня заземлены, то в нем возникает осевое сжимающее усилие R , которое будет направлено вдоль его оси ox . Его значение определяется соответствующим законом Гука [3]

$$R = -\frac{\Delta l_T EF}{l} = -\frac{\alpha EF}{l} \left\{ T_{oc} l + \left[(T_2 - T_{oc})(ch(al) - 1)/a - (T_1 - T_{oc})(1 - ch(al)/a) \right] / sh(al) \right\} \quad (17)$$

В этом случае по длине исследуемого стержня закон распределения термо-упругой составляющей напряжения σ можно определить согласно обобщенного закона Гука

$$\sigma = \frac{R}{F} = -\frac{\alpha E}{l} \left\{ T_{oc} l + [(T_2 - T_{oc})(ch(al) - 1)/a - (T_1 - T_{oc})(1 - ch(al)/a)] / sh(al) \right\} \quad (18)$$

Тогда закон распределения соответствующей термо-упругой составляющей деформации также определяется согласно закону Гука

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = -\frac{\alpha}{l} \left\{ T_{oc} l + [(T_2 - T_{oc})(ch(al) - 1)/a - (T_1 - T_{oc})(1 - ch(al)/a)] / sh(al) \right\} \quad (19)$$

Далее согласно теории теплофизики определяется закон распределения температурной составляющей деформации

$$\varepsilon_T(x) = -\alpha T(x) = -\alpha \left\{ T_{oc} + \frac{(T_2 - T_{oc})sh(ax) + (T_1 - T_{oc})sh(a(l-x))}{sh(al)} \right\}, 0 \leq x \leq l \quad (20)$$

Тогда температурная составляющая напряжения уже определяется согласно закону Гука

$$\sigma_T(x) = E \varepsilon_T(x) = -\alpha E \left\{ T_{oc} + \frac{(T_2 - T_{oc})sh(ax) + (T_1 - T_{oc})sh(a(l-x))}{sh(al)} \right\}, 0 \leq x \leq l \quad (21)$$

После этого согласно теории термоупругости можно определить закон распределения упругой составляющей деформации

$$\varepsilon_x(x) = \varepsilon - \varepsilon_T(x) = -\frac{\alpha}{l} \left\{ T_{oc} l + [(T_2 - T_{oc})(ch(al) - 1)/a - (T_1 - T_{oc})(1 - ch(al)/a)] / sh(al) \right\} + \alpha \left\{ T_{oc} + \frac{(T_2 - T_{oc})sh(ax) + (T_1 - T_{oc})sh(a(l-x))}{sh(al)} \right\}, 0 \leq x \leq l \quad (22)$$

Тогда согласно закону Гука, можно определить закон распределения упругой составляющей напряжения

$$\sigma_x(x) = E \varepsilon_x(x) = \sigma - \sigma_T(x) = -\frac{\alpha E}{l} \left\{ T_{oc} l + [(T_2 - T_{oc})(ch(al) - 1)/a - (T_1 - T_{oc})(1 - ch(al)/a)] / sh(al) \right\} + \alpha E \left\{ T_{oc} + \frac{(T_2 - T_{oc})sh(ax) + (T_1 - T_{oc})sh(a(l-x))}{sh(al)} \right\}, 0 \leq x \leq l \quad (23)$$

Наконец, можно определить закон распределения перемещения сечении стержня. Она определяется из соотношений Коши

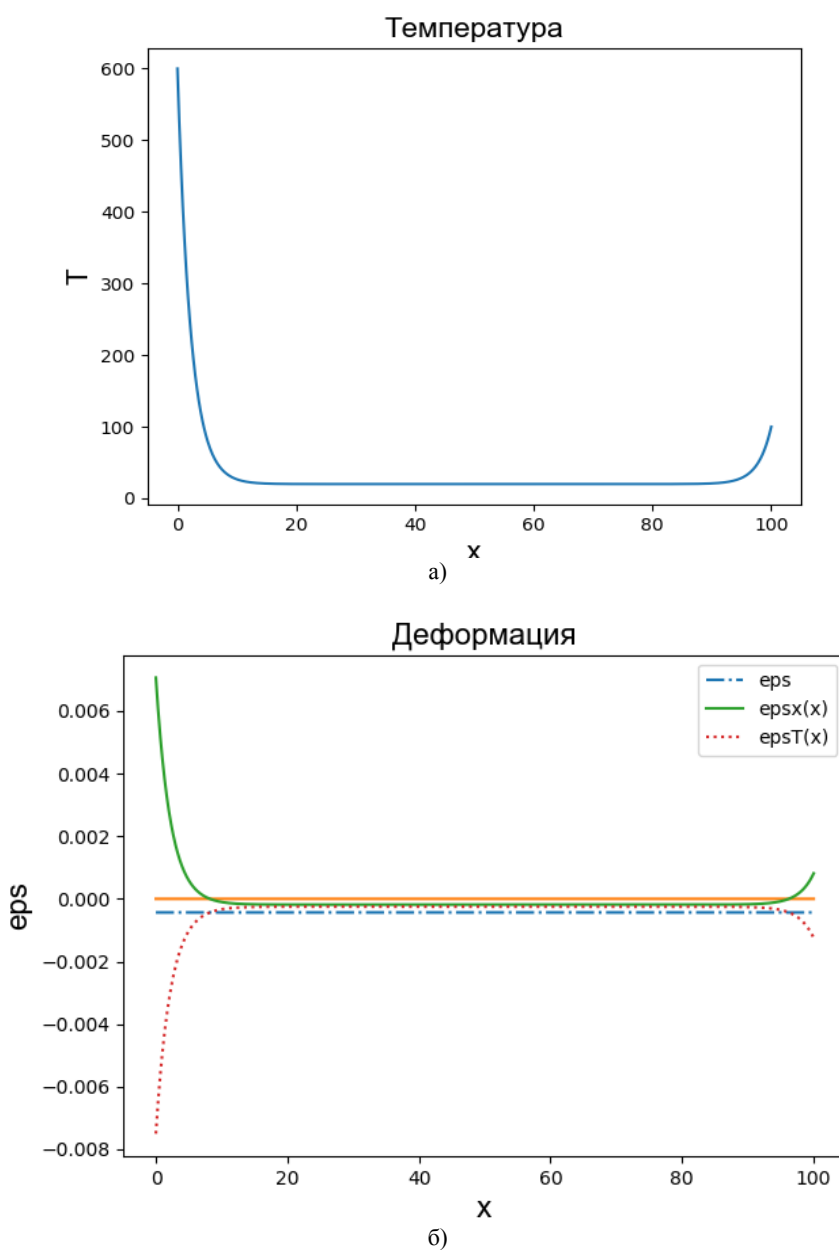
$$\varepsilon_x(x) = \frac{\partial u}{\partial x}; \Rightarrow U = \int \varepsilon_x(x) dx + C \quad (24)$$

Здесь значение постоянной C определяется из условий защемления $U(x=0)=0$. Тогда имеем

$$U(x) = -\alpha \left[T_{oc} + \frac{chal-1}{alshal} (T_1 + T_2 - 2T_{oc}) \right] x + \alpha \left\{ T_{oc} x + \frac{1}{ashal} [(T_2 - T_{oc})chax - (T_1 - T_{oc})] \right\} + \frac{\alpha}{ashal} [(T_1 - T_{oc})chal - (T_2 - T_{oc})] \quad (25)$$

Если принимать за исходных данных: $l=100\text{см}$, $K_{xx} = 100 \frac{\text{Вт}}{\text{см}^2 \text{с}^0}$, $h=10 \frac{\text{Вт}}{\text{см}^2 \text{с}^0}$; $T_{oc} = 20^0\text{C}$; $\alpha = 125 \cdot 10^{-7} \frac{1}{\text{с}^0}$; $E=2 \cdot 10^6 \frac{\text{кГ}}{\text{см}^2}$; $T_1=600^0\text{C}$; $T_2=100^0\text{C}$; $r=1\text{см}$. То получим результаты приведенной на

Рисунке-2. На Рисунке-2, а) приводится закон распределения температуры по длине стержня. Возникающие закон распределения составляющих деформаций приводится на Рисунке-2, б). Из рисунка видно, что термо-упругая составляющая деформация ϵ -является постоянный по всей длине стержня. В то время упругая составляющая деформация $\epsilon_x(x)$, на участках вблизи защемления имеют растягивающий характер. В серединной участке стержня $\epsilon_x(x)$ имеет сжимающий характер. Температурная составляющая деформация $\epsilon_T(x)$ по всей длине имеет сжимающий характер. Ее максимальная значения соответствует наибольшему температуре. Характер составляющих напряжений подобно соответствующим деформациям. Это наглядно видно из Рисунка-2, в). На Рисунке-2, г) приводится поле распределения перемещения сечений стержня. Из рисунка видно, что сечений стержня на участке $0 < x \leq 6,9$ см перемещающийся по направлению оси ox . В то время наибольшее перемещение $U_{max1}=0,0043092$ см соответствует к сечению координата которого $x=8$ см.; Сечении стержня находящихся на участке $70 < x < l=100$ см перемещаются против направления оси ox . Здесь наибольшее перемещение $U_{max2}=-0,0016472$ см соответствует к сечению, координата которого $x=94$ см. При этом $|U_{max1}|/|U_{max2}|=2,61639$;



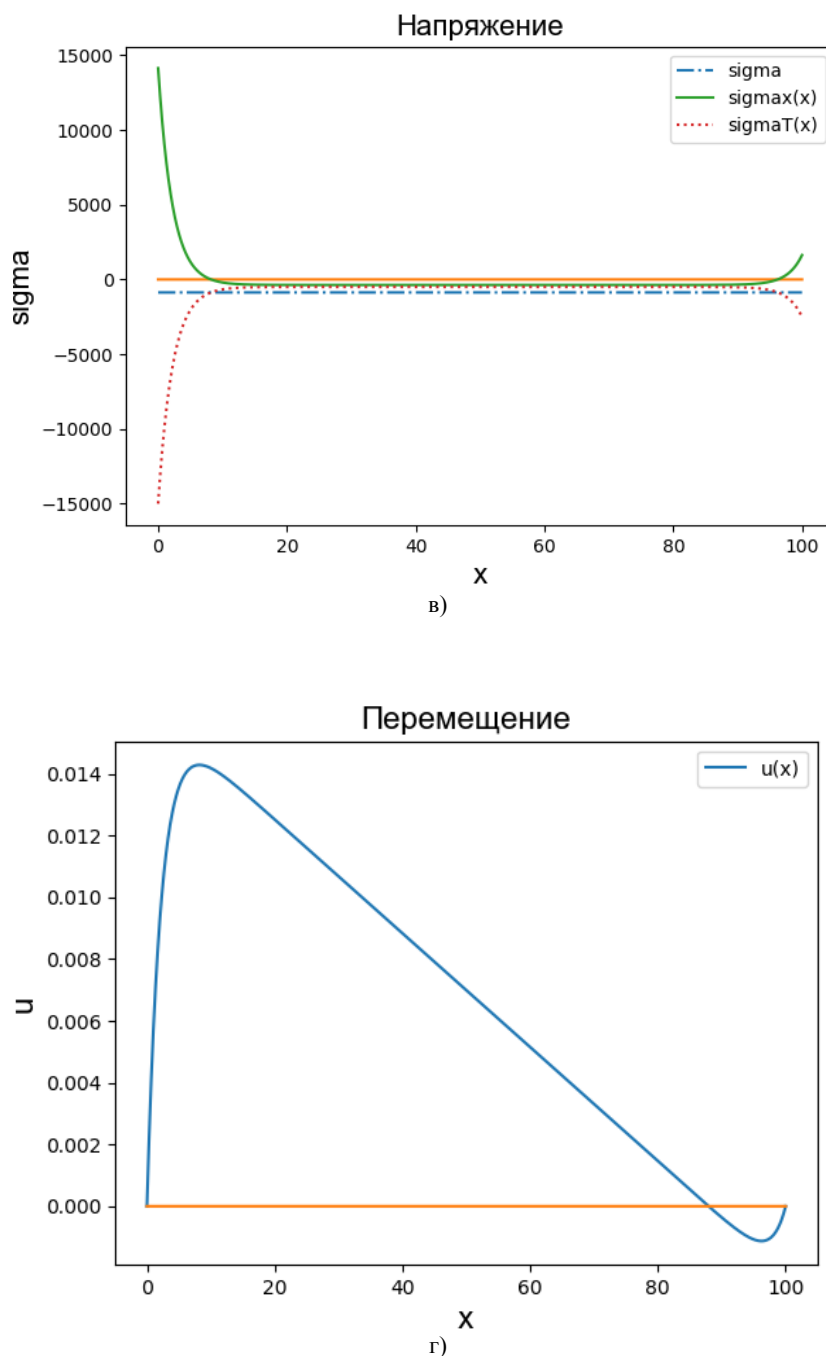


Рисунок 2 - Законы распределения температур, деформаций, напряжений и перемещения

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Кудайкулов А.К., Кенжегулов Б.З., Мырзашева А.Н. Математическая модель установившегося поля распределения температуры по длине стержня, ограниченной длины при наличии локальной температуры, теплового потока, теплообмена и теплоизоляции. Наука и новые технологии, №5, г. Бишкек, 2009 г., С.17-2.
- [2] Кудайкулов А.К., Тулеуова Р., Амиртаев К.Б., Токкулиев Б.М., “Установившееся напряженно-деформированное состояние жестко-закрепленного двумя концами частично теплоизолированного стержня при наличии теплового потока, теплообмена и температуры”, Труды пятой Всероссийской научной конференции с международным участием (29–31 мая 2008 г.). Часть 1, Математические модели механики, прочности и надёжности элементов конструкций, Матем. моделирование и краев. задачи, СамГТУ, Самара, 2008, 161–164.
- [3] Кудайкулов А.К. Математическое (конечно-элементное) моделирование прикладных задач распространения тепла в одномерных конструктивных элементах. - Туркестан: Байтерек, - 2009. - 168 с.

- [4] Кенжегулов Б.З., Кудайкулов А.К., Мырзашева А.Н. Численное исследование удлинения стержня из жаропрочного сплава с учетом наличия всех видов источников. Известия вузов. - Бишкек, 2009. - №4. - С. 3-7.
- [5] Ташенова Ж.М., Нурлыбаева Э.Н., Жумадилаева А.К., Кудайкулов А.К. Вычислительный алгоритм и моделирование термонапряженного состояния стержня из жаропрочного сплава при наличии теплообмена, теплоизоляции и температуры постоянной интенсивности. Фундаментальные исследования. – 2012. – № 3–3. – С. 660-664;
- [6] Иванов А.С. Математические аналогии в механике сплошной среды. Монография. Москва, МГОУ, 2009, 180с
- [7] X Gu, X Dong, M Liu, Y Wang - Heat Transfer—Asian Research, 2012 - Wiley Online Library.
- [8] Айтиалиев Ш.М., Кудайкулов А.К., Мардонов Б. Механика прихвата бруйльных колон в нефтегазовых скважинах. Алматы-Атырау: Издательство «Эвро», 1999, -82с.
- [9] Chernyaeva T. P. and Ostapov A. V., Problems of Atomic Science and Technology. Ser. Physics of Radiation Effect and Radiation Material Science, (87) 5, 16 (2013).
- [10] Zelensky V. F., Problems of Atomic Science and Technology. Ser. Nuclear Physics Investigations (85) 3, 76 (2013).
- [11] M.L.F. Lerch, M. Petasecca, A. Cullen et al., Radiation Measurements 46, 1560 (2011).
- [12] Bezshyyko A., Vyshnevskiy I.M., Denisenko R.V. et al., Nucl. Phys. At. Energy 12, No. 4, 400 (2011).
- [13] Гестрин С.Г. Локализация экситонов Френкеля на дислокациях / С.Г. Гестрин, А.Н. Сальников. Известие вузов. Физика. 2005. № 7. С. 23-25.
- [14] Tungatarov A., D.K. Akhmed-Zaki. Cauchy problem for one class of ordinary differential equations// Int. J. of Mathematical Analyses. 2012, vol.6, no 14, 695-699.
- [15] Meirmanov A., Mathematical models for poroelastic flows, Atlantis Press// Paris, 2013,478 pp.
- [16] Kulpeshov B.Sh., Macpherson H.D., Minimality conditions on circularly ordered structures. Mathematical Logic Quarterly, 51 (2005), 377-399.
- [17] Kulpeshov B.Sh., On \aleph_0 -categorical weakly circularly minimal structures. Mathematical Logic Quarterly, volume 52, issue 6, 2006, 555-574.
- [18] Ерофеев В.Л., Семенов П.Д. Теплотехника. – М.: ИКЦ Академкнига.-2006.-488с.
- [19] Луканин В.Н. Теплотехника.-М.: Высшая школа.-2002.-671с.
- [20] Ноздрев В.Ф. Курс термодинамики. – М.: Мир, 1967. – 247 с.

А.С. Жумаханова¹, М.О. Ноғайбаева², А. Аскарова³,
М.Т. Аршидинова³, К.Б. Бегалиева³, А.К. Кудайкулов³, А.А. Ташев³

¹С.Сейфуллин атындағы қазақ агротехникалық университеті, Астана, Қазақстан

²ҚР БҒМ ҒА У.А.Жолдасбеков атындағы механика және машинатану институты

³ ҚР БҒМ ҒА Ақпараттық және есептеу технологиялары институты

ҰЗЫНДЫҒЫ ШЕКТЕУЛІ ТҰРАҚТЫ ТЕРМОМЕХАНИКАЛЫҚ КҮЙДІҢ БІР МЕЗГІЛДЕ ШЕКТІК ТЕМПЕРАТУРАНЫҢ ЖӘНЕ БҮЙІРЛІК ЖЫЛУ АЛМАСУ ӘСЕРІ ЕСЕБІН ТАЛДАМАЛЫҚ ШЕШУ

Аннотация. Бұл мақалада өзектің термомеханикалық күйін сандық зерттеу проблемалары қарастырылады.

Көптеген өндіріс орындарында негізгі құрылым элементтері күрделі жылу көздері әсерінде тұрақты жұмыс жасайды. Өндірістің үздіксіз жұмыс жасауы әрине сол элементтердің сынып қалмауына тікелей байланысты. Сондықтанда алдын – ала негізгі құрылым элементтердің әр түрлі жылу көздері әсерінде қандай термо-механикалық жағдайда болуын терең зерттеу өндірістің үздіксіз, тұрақты, сапалы жұмыс жасау тұрғысынан өте өзекті мәселе болып табылады.

Әт уақытта тұрақты көлденең қима арқылы өтетін жылу мөлшерінің өзгеруі туралы іргелі заңның негізінде шекті ұзындықты және қимасы тұрақты көлденең өзектің жылу өткізгіштігінің тендеуін құруға болады.

Бұл жағдайда қарастырылған өзектің екі ұшында әртүрлі температура белгіленеді, ал қоршаған ортамен жылу алмасуы бүйірлік бет арқылы өтеді. Сонымен қатар, зерттелетін өзек ANV-300 термиялық қорғаныш материалынан жасалған. Барлық орын алатын деформациялар мен кернеулерге байланысты, сондай-ақ зерттелген өзектің ұзындығы бойынша қозғалу кезіндегі температура таралуын анықтайтын заң. Жылулық ұзартудың және осыған қарсы күштің мәндері есептеледі.

Реактивті және сүтегі қозғалтқыштарының компоненттері, ядролық және жылу электр станциялары, өңдеу өнеркәсібінің өңдеу желілері, сондай-ақ ішкі жану қозғалтқыштары бар күрделі жылу аймағында жұмыс істейді. Осы құрылымдардың сенімді жұмыс істеуі мойынтіректер компоненттерінің термоэлектрлік қуатына байланысты болады. Демек, бұл зерттеу екі жағында шектелген шектеулі ұзындықтағы өзектер түріндегі құрылымдық компоненттердің термоэлектрлік қуатының жай-күйін сандық зерттеуге арналған.

Ұсынылған есептеу алгоритмі энергия үнемдеу принципіне негізделген. Бұл жағдайда функционалдык энергетикалық формулалардағы интегралдардың барлық түрлері аналитикалық түрде интегралданған. Бұл жағдайда алынған сандық шешімдер жоғары дәлдікке ие болады.

Тірек сөздер: жылу ағыны, жылу беру, жылу өткізгіштік, жылу алмасу, жылу оқшаулау.

A.S. Zhumakhanova¹, M.O. Nogaybaeva², A. Askarova³,
M.T. Arshidinova³, K.B. Begalyeva³, A.K. Kudaykulov³, A.A. Tashev³

¹Kazakh agrarian-technical University named S.Seifullin, Astana, Kazakhstan;

²Institute of Mechanics and Engineering Science named after academician U.A. Dzholdasbekov;

³Institute of Information and Computing Technologies CS MES RK

**AN ANALYTICAL SOLUTION TO THE PROBLEM OF THE THERMOMECHANICAL STATE
OF A ROD OF LIMITED LENGTH, WITH SIMULTANEOUS PRESENCE
OF END TEMPERATURES AND LATERAL HEAT EXCHANGE**

Abstract. This article deals with the problems of numerical study of the thermomechanical state of rods. On the basis of the fundamental law on the change in the amount of heat, an equation of the established thermal conductivity for a horizontal rod of limited length and a constant cross section is constructed through a fixed cross-section in a time $\partial\tau$. In this case, different temperatures are set at the two ends of the investigated rod, and heat exchange with the surrounding medium takes place through the lateral surface. In addition, the investigated rod is made of thermal protective material ANV-300. The determining law of the distribution of temperature, of all the corresponding deformations and stresses, and also of the displacement along the length of the investigated rod. The values of the thermal elongation and the resulting axial force are calculated.

In a complex thermal zone, bearing components of reactive and hydrogen engines, nuclear and thermal power stations, processing lines of processing industries, as well as internal combustion engines operate. The reliable operation of these structures will depend on the conditions of the thermoelectric power of the bearing components. Therefore, this study is devoted to a numerical study of the state of the thermoelectric power of the structural components in the form of rods of limited length, bounded at both ends.

The proposed computational algorithm is based on the principle of energy conservation. In this case, all types of integrals in the functional energy formulas are integrated analytically. In this case, the numerical solutions obtained will have high accuracy.

Keywords: the temperature, the rod, the thermal energy, the algorithm.

Сведения об авторах:

Аскарова А. - PhD докторант 2-го года обучения специальности 6D070500 - «Математическое и компьютерное моделирование», Института информационных и вычислительных технологий КН МОН РК, e-mail: 91-ashok@mail.ru;

Аршидинова М.Т. - PhD докторант 1-го года обучения специальности 6D070400 - «Вычислительная техника и программное обеспечение», Института информационных и вычислительных технологий КН МОН РК, e-mail: mukaddas_arshidi@mail.ru;

Бегалиева К.Б. - PhD докторант 1-го года обучения специальности 6D070200 - «Автоматизация и управление», Института информационных и вычислительных технологий КН МОН РК, e-mail: kalamkas_b@mail.ru,

Кудайкулов А.К. - доктор физико-математических наук Института информационных и вычислительных технологий КН МОН РК, e-mail: kudaykulov2006@mail.ru;

Ташев А.А. - доктор технических наук Института информационных и вычислительных технологий КН МОН РК, e-mail: azattash@mail.ru;

Жумаханова Анар Сыдыковна - старший преподаватель кафедры «Информационные системы», Казахский агротехнический университет имени С.Сейфуллина, e-mail: guldana2002@mail.ru;

Ногайбаева Макпал Оразбаевна - PhD докторант Института механики и машиноведения имени академика У.А.Джолдасбекова, e-mail: zhuldyz_tm@mail.ru.

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 1, Number 317 (2018), 114 – 129

УДК 517.956.32

М.И. Акылбаев¹, А. Бейсебаева², А. Ш. Шалданбаев³,

¹Региональный социально-гуманитарный университет, г.Шымкент;

²ЮКГУ им. М.Ауезова, г. Шымкент;

³ЮКГУ им. М.Ауезова, г. Шымкент

musabek_kz@mail.ru akbope_a@mail.ru shaldanbaev51@mail.ru

О ПЕРИОДИЧЕСКОМ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ ГУРСА ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Аннотация. В данной работе решена задача Гурса в характеристическом четырехугольнике для волнового уравнения специального вида с переменными коэффициентами. Получено спектральное представление решения, не традиционное для таких вольтерровых задач. Для этого в качестве вспомогательной задачи использована спектральная задача для уравнения с отклоняющимся аргументом. Показано, что оператор вида $Su(x) = u(1-x)$ играет роль оператора Шмидта встречающиеся в разложениях вольтерровых операторов.

Ключевые слова: Вольтерровые операторы, индефинитная метрика, задача Гурса, операторы подобия, спектр, спектральное разложение, метод Фурье, ортогональный базис, теорема Гильберта-Шмидта.

1. Введение. Исследования задачи Дирихле для уравнения колебания струны в ограниченной области восходят к Ж. Адамару который впервые отметил не единственность решения в прямоугольнике. Д. Бургин и Дюффин [2] рассмотрели задачу Дирихле для уравнения $u_{xx} = u_{tt}$ в прямоугольнике $\{0 < x < X; 0 < t < T\}$. Показано, что не единственность решения в определенном пространстве возникает тогда и только тогда, когда X/T рационально. Установлены теоремы существования решения в классических пространствах, причем гладкость решения тем больше, чем больше гладкость граничной функции и чем хуже число X/T приближается рациональными числами. Рассмотрена также задача Неймана. В дальнейшем эти результаты уточнялись и обобщались различными авторами (см., напр., [3], [4], [5], [6]). С. Л. Соболев [7] построил пример корректной граничной задачи в прямоугольнике для гиперболической системы уравнений, Ю. М. Березанский [8] построил класс областей с углами, изменение области внутри которого приводит к непрерывному изменению решения задачи Дирихле. Для областей с гладкой границей в гладких пространствах изучался только вопрос о единственности решения задачи Дирихле (см., напр., работу Р. А. Александряна [9]). В работе [3] В. И. Арнольд, применяя свои результаты по отображениям окружности в себя, уточняет результаты работы [2], указывая, что доказательство теорем о существовании классических решений задачи Дирихле можно перенести на случай эллипса. Ряд исследований Т. Ш. Кальменова и М. А. Садыбекова также посвящены к краевым задачам гиперболических уравнений [10]-[12], результаты этих исследований подытожены в монографии [13].

В работе [14] с помощью нового общего метода исследованы свойства решений задачи Коши, а также первой, второй и третьей краевых задач в круге для гиперболического уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Применение этого метода к уравнениям высокого порядка см. в [15]. В работе [16] предлагается новый и относительно простой метод построения системы полиномиальных решений задачи Дирихле для гиперболических уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами в круге, а также предлагается построение полной совокупности собственных функций задачи Дирихле для уравнения колебания струны.

Построенные в этой работе собственные функций совпадают с собственными функциями, построенными ранее в работе Р.А.Александаряна [9].

Проведенный анализ содержания этих работ показал, что спектральные свойства этих краевых задач зависят от геометрии области, в частности, от группы движения области. Не равносторонний треугольник не обладает группой симметрий, поэтому мы отказались от характеристического треугольника и стали рассматривать краевых задач внутри характеристического четырехугольника. При этом естественным образом появляются уравнения с отклоняющимся аргументами, которые заслуживают отдельного исследования [17]-[24].

1. Пусть Ω есть характеристический четырехугольник волнового уравнения,

$$u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} + q\left(\frac{\xi-\eta}{2}\right)(u_{\xi} + u_{\eta}) + p\left(\frac{\xi+\eta}{2}\right)(u_{\xi} - u_{\eta}) + p\left(\frac{\xi+\eta}{2}\right)q\left(\frac{\xi-\eta}{2}\right)u = f(\xi, \eta) \quad (1)$$

со сторонами $AB: \xi + \eta = 0, BC: \xi - \eta = 2, CD: \xi + \eta = 2, DA: \xi - \eta = 0$

[См.Рис1.].

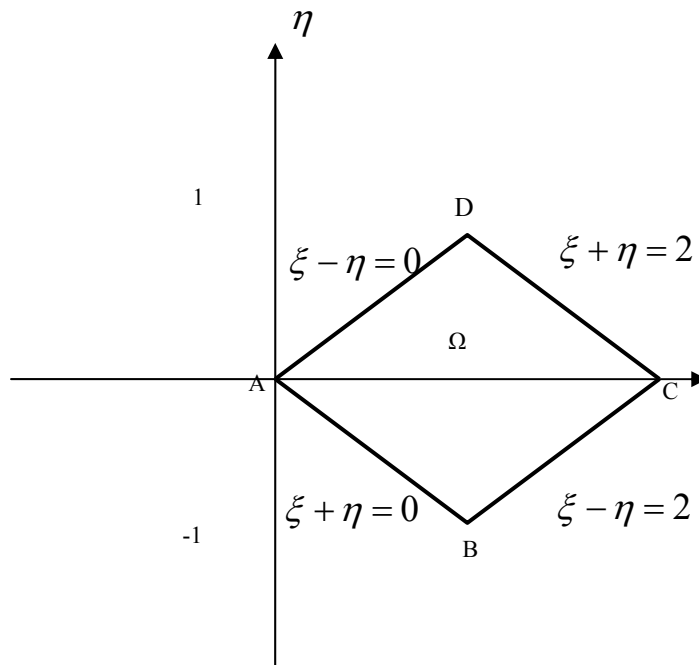


Рисунок 1

Предположим, что правая часть уравнения (1) периодическая функция с какими-то периодами. Спрашивается может ли иметь уравнение (1) периодического решения при соответствующих поведении коэффициентов.

Известно, что периодическая задача плохо поставлена для волнового уравнения из за наличия бесконечнократного собственного значения в точке $\lambda = 0$. Поэтому мы рассмотрим задачу Гурса для уравнения (1) и изучим возможности периодической продолжаемости решения этой задачи на всю (ξ, η) плоскость.

Постановка задачи. Найти периодического решения задачи Гурса для волнового уравнения

$$\begin{cases} u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} + q\left(\frac{\xi-\eta}{2}\right)(u_{\xi} + u_{\eta}) + p\left(\frac{\xi+\eta}{2}\right)(u_{\xi} - u_{\eta}) + p\left(\frac{\xi+\eta}{2}\right)q\left(\frac{\xi-\eta}{2}\right)u = f(\xi, \eta) & (1) \\ u|_{AB} = 0, \quad u|_{BC} = 0 & (2) \end{cases}$$

Для решения этой задачи сделаем замену переменных. Полагая, $x = \frac{\xi+\eta}{2}, y = \frac{\xi-\eta}{2}$, имеем

$$\xi = x + y, \quad \eta = x - y; \quad u(\xi, \eta) = u(x + y, x - y) = \hat{u}(x, y);$$

$$\begin{aligned}
 u_\xi &= \hat{u}_x \cdot x_\xi + \hat{u}_y \cdot y_\xi = \hat{u}_x \cdot \frac{1}{2} + \hat{u}_y \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(\hat{u}_x, \hat{u}_y); \\
 u_{\xi\xi} &= \frac{1}{2}[\hat{u}_{xx} \cdot x_\xi + \hat{u}_{xy} \cdot y_\xi + \hat{u}_{yx} \cdot x_\xi + \hat{u}_{yy} \cdot y_\xi] = \frac{1}{2}\left[\hat{u}_{xx} \cdot \frac{1}{2} + \hat{u}_{xy} \cdot \frac{1}{2} + \hat{u}_{yx} \cdot \frac{1}{2} + \hat{u}_{yy} \cdot \frac{1}{2}\right] = \\
 &= \frac{1}{4}[\hat{u}_{xx} + 2\hat{u}_{xy} + \hat{u}_{yy}]; \\
 u_\eta &= \hat{u}_x \cdot x_\eta + \hat{u}_y \cdot y_\eta = \hat{u}_x \cdot \frac{1}{2} - \hat{u}_y \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(\hat{u}_x, \hat{u}_y); \\
 u_{\eta\eta} &= \frac{1}{2}[\hat{u}_{xx} \cdot x_\eta + \hat{u}_{xy} \cdot y_\eta - \hat{u}_{yx} \cdot x_\eta - \hat{u}_{yy} \cdot y_\eta] = \frac{1}{2}\left[\hat{u}_{xx} \cdot \frac{1}{2} - \hat{u}_{xy} \cdot \frac{1}{2} - \hat{u}_{yx} \cdot \frac{1}{2} + \hat{u}_{yy} \cdot \frac{1}{2}\right] = \\
 &= \frac{1}{4}[\hat{u}_{xx} - 2\hat{u}_{xy} + \hat{u}_{yy}]; \\
 u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} &= \hat{u}_{xy}.
 \end{aligned}$$

После сделанной замены уравнение (1) примет вид

$$\hat{u}_{xy} + \hat{q}(y)\hat{u}_x + \hat{p}(x)\hat{u}_y + \hat{p}(x)\hat{q}(y)\hat{u}(x, y) = \hat{f}(x, y).$$

Отпустив шапочек после преобразования, получим

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} + p(x)\right] \cdot \left[\frac{\partial}{\partial y} + q(x)\right] \cdot u(x, y) = f(x, y).$$

Это есть волновое уравнение специального вида. Теперь займемся граничными условиями, и областью изменения новых переменных x, y . Отображение $x = \frac{\xi+\eta}{2}, y = \frac{\xi-\eta}{2}$ переводит область Ω в область D (см. Рис.2).

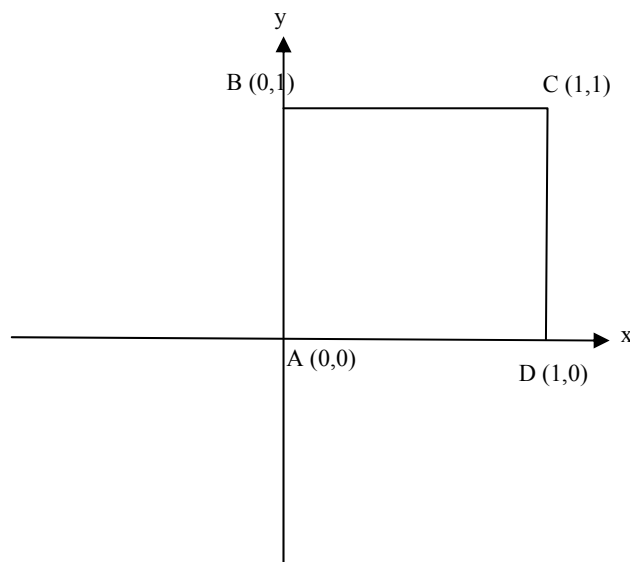


Рисунок 2

Следовательно, наша исходная задача примет следующий вид

$$\begin{cases} \left[\frac{\partial}{\partial x} + p(x)\right] \cdot \left[\frac{\partial}{\partial y} + q(x)\right] \cdot u(x, y) = f(x, y), & (x, y) \in D & (3) \\ u|_{x=0} = 0, & u|_{y=1} = 0. & (4) \end{cases}$$

Целью настоящей работы является решение задачи Гурса (3)-(4) методами спектральной теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументами [17-24], и доказательство периодичности полученного решения.

2. Методы исследования

Сначала изучим соответствующую спектральную задачу:

$$\begin{cases} y'(x) + q(x)y(x) = \lambda \cdot y(1-x), & x \in (0,1), \\ y(0) = 0. \end{cases} \quad (5)$$

(6)

где $q(x)$ – непрерывная функция.

Спрашивается при каких условиях на $q(x)$ оператор задачи (5)-(6) подобна к оператору задачи

$$\begin{cases} y'(x) = \lambda \cdot y(1-x), & x \in (0,1), \\ y(0) = 0. \end{cases} \quad (5')$$

(6')

Лемма 2.1.

Если $H=L_2(0,1)$

и

$$q(x) + q(1-x) = 0,$$

то операторы

$$A = \frac{d}{dx}, \quad D(A) = \{y(x) \in W_2^1, \quad y(0) = 0\}$$

$$B = \frac{d}{dx} + q(x), \quad D(B) = \{z(x) \in W_2^1, \quad z(0) = 0\}$$

подобны между собой.

Доказательство. Оператора преобразования ищем в виде

$$z(x) = Ty(x) = e^{\int_0^x q(t)dt} \cdot y(x).$$

Тогда имеем $z(0) = e^0 \cdot y(0) = 0$ при $y(x) \in D(A)$. Следовательно, оператор T переводит область определения оператора A в область определения оператора, т.е. $T: D(A) \rightarrow D(B)$.

Далее, $z'(x) = y'(x) \cdot e^{\int_0^x q(t)dt} + q(x) \cdot y(x) \cdot e^{\int_0^x q(t)dt} = T[y'(x) + q(x) \cdot y(x)] = TBu(x)$.

Следовательно,

$$Az = z'(x) = TBu(x) \Rightarrow ATy(x) = TBu(x), \quad \forall y(x) \in D(B), \quad T^{-1}AT = B,$$

что и требовалось доказать.

Лемма 2.2.

Если $H=L_2(0,1)$, и

- (1) $q(x) + q(1-x) = 0$;
- (2) $Sy(x) = y(1-x), \quad \forall y(x) \in L_2(0,1)$,

то операторы SA и SB подобны между собой, где

$$A = \frac{d}{dx}, \quad D(A) = \{y(x) \in W_2^1, \quad y(0) = 0\}$$

$$B = \frac{d}{dx} + q(x), \quad D(B) = \{z(x) \in W_2^1, \quad z(0) = 0\}$$

Доказательство. Пусть

$$Ty(x) = e^{\int_0^x q(t)dt} \cdot y(x),$$

тогда в силу леммы 1 имеем $AT = TB$, $\forall y(x) \in D(B)$. Действуя оператором S на это равенство получим

$$SAT = STB.$$

Для доказательства леммы достаточно, чтобы операторы S и T коммутировали. Проверим, что при выполнении условия, $q(x) + q(1-x) = 0$, операторы S и T коммутируют.

$$\begin{aligned} STy(x) &= Se^{\int_0^x q(t)dt} \cdot y(x) = e^{\int_0^x q(t)dt} \cdot y(1-x), \\ TSy(x) &= Ty(1-x) = e^{\int_0^x q(t)dt} \cdot y(1-x), \end{aligned}$$

Если $STy(x) = TSy(x)$, то $e^{\int_0^x q(t)dt} = e^{\int_0^{1-x} q(t)dt}$, $\int_0^x q(t)dt - \int_0^{1-x} q(t)dt = 0$.

Продифференцировав последнее равенство, получим

$$q(x) + q(1-x) = 0.$$

Обратно из последнего равенства следует предыдущее равенство. В самом деле, если $q(x) + q(1-x) = 0$, то

$$\int_0^x q(t)dt - \int_0^x q(1-t)dt = 0, \quad (7)$$

$$\int_0^x q(1-t)dt = \left| \frac{t=1-\xi}{dt=-d\xi} \right| = -\int_0^{1-x} q(\xi)d\xi = \int_{1-x}^1 q(\xi)d\xi = \int_0^1 q(t)dt - \int_0^{1-x} q(t)dt; \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 q(t)dt &= \left| \frac{t=1-\xi}{dt=-d\xi} \right| = -\int_1^0 q(1-\xi)d\xi = \int_0^1 q(1-\xi)d\xi = |q(1-\xi) = -q(\xi)| = \\ &= \int_0^1 q(\xi)d\xi = -\int_0^1 q(t)dt, \Rightarrow \int_0^1 q(t)dt = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Очевидно, что из (9), (8) и (7) следует равенство

$$\int_0^x q(t)dt - \int_0^{1-x} q(t)dt = 0.$$

Из последнего равенства в свою очередь следует равенство $ST=TS$. Лемма доказана.

Лемма 2.3. Пусть $H = L_2(0, 1)$,

$$q(x) + q(1-x) = 0,$$

и

$$\begin{aligned} A &= \frac{d}{dx}, \quad D(A) = \{y(x) \in W_2^1, \quad y(0) = 0\} \\ B &= \frac{d}{dx} + q(x), \quad D(B) = \{z(x) \in W_2^1, \quad z(0) = 0\} \end{aligned}$$

Тогда спектры операторов SA и SB совпадают.

Доказательство. В силу леммы 2, имеет место равенство

$$SAT = STB, \Rightarrow SA = TSBT^{-1},$$

где

$$Ty(x) = e^{\int_0^x q(t)dt} \cdot y(x).$$

Тогда

$$SA - \lambda I = T(SB - \lambda I)^{-1}. \Rightarrow (SA - \lambda I)^{-1} = T(SB - \lambda I)^{-1}T^{-1}.$$

Следовательно, резольвентные множества операторов SA и SB совпадают, поэтому их спектры также совпадают.

Теперь исследуем спектр оператора SA , ввиду их важности для приложений, приводим подробные вычисления.

Лемма 2. 4.

Если $H=L_2(0,1)$, $Sy(x)=y(1-x)$,

$$A = \frac{d}{dx}, \quad D(A) = \{y(x) \in W_2^1, y(0) = 0\},$$

то оператор SA имеет бесконечное множество собственных значений

$$\lambda_n = (-1)^n \left(n\pi + \frac{\pi}{2} \right), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

и соответствующих им собственных функций

$$u_n = \sqrt{2} \sin \left(n\pi + \frac{\pi}{2} \right) x, \quad B_n = \text{const},$$

которые образуют ортонормированный базис пространства $H=L_2(0,1)$.

Доказательство. Пусть тогда $Au = \mu Su$, следовательно, мы имеем дело с обобщенной спектральной задачей:

$$\begin{cases} u'(x) = \mu \cdot u(1-x), \\ u(0) = 0. \end{cases} \quad (10)$$

Продифференцировав уравнения (10), получим

$$u''(x) = -\mu \cdot u'(1-x) = \mu \cdot \mu \cdot u(x) = -\mu^2 \cdot u(x), \Rightarrow$$

$$\begin{cases} u''(x) = \mu^2 \cdot u(x), \end{cases} \quad (11)$$

$$\begin{cases} u(0) = 0, u(1) = 0. \end{cases} \quad (12)$$

Общее решение уравнения (11) имеет вид

$$u(x) = A \cos \mu x + B \sin \mu x, \quad A, B - \text{const} \quad (13)$$

Подставив (13) в граничные условия (12), получим

$$u(0) = A = 0, \quad u'(1) = [-\mu A \sin \mu x + \mu B \cos \mu x]_{x=1} = \mu \cdot B \cos \mu = 0.$$

Поскольку, $B \neq 0$, то собственные значения задачи (11) +(12) находятся из уравнения

$$\Delta(\mu) = \mu \cos \mu x = 0, \quad (14)$$

Значению $\mu = 0$ соответствует тривиальное решение $u(x) \equiv 0$, поэтому он не является собственным значением. Из уравнения, $\cos \mu = 0$, находим собственных значений задачи (11)+(12).

$$\mu_n = n\pi + \frac{\pi}{2}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (15)$$

Квадрат каждого собственного значения задачи (10) является собственным значением задачи Штурма-Лиувилля (11)-(12), при этом соответствующие собственные функций совпадают. Но задача (11) -(12) может иметь и других собственных значений, и соответствующих им собственных функций, поэтому целесообразно прямая проверка полученных собственных функций. Подставив собственных функций, $u_n(x) = B_n \sin \mu_n x$, $B_n = \text{const}$ в уравнение (10), имеем

$$\begin{aligned} u'_n(x) &= \mu_n B_n \cos \mu_n x, \\ u_n(1-x) &= B_n \cdot \sin \mu_n(1-x) = B_n \cdot \sin(\mu_n - \mu_n x) = \\ &= B_n \cdot \sin \mu_n \cdot \cos \mu_n x - \cos \mu_n \cdot \sin \mu_n x = B_n \cdot \sin \left(n\pi + \frac{\pi}{2} \right) x \cdot \cos \mu_n x = B_n \cdot \cos n\pi \cdot \cos \mu_n x = \\ &= (-1)^n B_n \cdot \cos \mu_n x. \end{aligned}$$

Следовательно, $u'_n(x) = (-1)^n \mu_n u_n(1-x)$, где

$$\mu_n = n\pi + \frac{\pi}{2}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Покажем полноту полученной системы собственных функций. Пусть для некоторого, $f(x) \in L_2(0, 1)$, имеет место равенства

$$\int_0^1 f(x) u_n(x) dx = 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) \sin \left(n\pi + \frac{\pi}{2} \right) x dx &= 0, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \\ \int_0^1 f(x) \sin \left(-n\pi + \frac{\pi}{2} \right) x dx &= 0, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned}$$

Сложив этих двух равенств, имеем

$$\int_0^1 f(x) \cos \frac{\pi x}{2} \sin \pi x dx = 0, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Отсюда в силу полноты системы функций $\{\sin n\pi x\}$ в пространстве $L_2(0, 1)$ получим $f(x) \cos \frac{\pi x}{2} = 0$ почти всюду в *следовательно*, $f(x) = 0$ почти всюду в.

Ортогональность полученной системы проверяется непосредственным вычислением

$$\int_0^1 \sin\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right)x \cdot \sin\left(m\pi + \frac{\pi}{2}\right)x dx = \frac{1}{2} \int_0^1 [\cos(n-m)\pi x - \cos(n+m+1)\pi x] dx =$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(n-m)\pi x}{(n-m)\pi} - \frac{\sin(n+m+1)\pi x}{(n+m+1)\pi} \right]_0^1 = 0, \text{ при } n \neq m.$$

Вычислив норму собственной функций, имеем

$$\|u_n\|^2 = 2 \cdot \int_0^1 \sin^2\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right)x dx = \int_0^1 [1 - \cos(2n\pi + \pi)x] dx = 1.$$

Лемма 2.4 доказана.

Теперь мы в состоянии доказать следующую теорему.

Теорема 2.1. Если $H = L_2(0, 1)$, и $q(x)$ -непрерывная вещественная функция, удовлетворяющая условию,

$$q(x) + q(1-x) = 0,$$

то собственные функций краевой задачи

$$\begin{cases} y'(x) + q(x)y(x) = \lambda y(1-x), \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad (14)$$

образуют базис Рисса в пространстве $L_2(0, 1)$.

Доказательство. Пусть $u_n(x)$ – собственные функций краевой задачи (10), тогда функций

$$y_n(x) = e^{-\int_0^x q(t)dt} \cdot u_n(x)$$

будут собственными функциями задачи (14). В самом деле,

$$y_n'(x) = u_n'(x)e^{-\int_0^x q(t)dt} - q(x)u_n(x)e^{-\int_0^x q(t)dt}, \quad \Rightarrow$$

$$y_n'(x) + y_n(x)q(x) = u_n'(x)e^{-\int_0^x q(t)dt}.$$

Действуя оператором $Sy(x) = y(1-x)$ на это равенство, и приняв во внимание условия теоремы, имеем

$$\begin{aligned} s[y_n'(x) + y_n(x)q(y)] &= u_n'(x)e^{-\int_0^x q(t)dt} = \mu_n u_n(x)e^{-\int_0^x q(t)dt} = \mu_n y_n(x), \quad \Rightarrow \\ y_n'(x) + y_n(x)q(y) &= \mu_n y_n(1-x), \quad y_n(0) = 0. \end{aligned}$$

Осталось лишь заметить, что оператор

$$Tu_n(x) = e^{-\int_0^x q(t)dt} \cdot u_n(x)$$

линейный ограниченный, и обратимый оператор в пространстве $L_2(0,1)$. Теорема доказана.

Теперь приступим к решению поставленной ранее задачи, для этого сначала решим спектральную задачу

$$\begin{cases} \left[\frac{\partial}{\partial x} + p(x) \right] \left[\frac{\partial}{\partial y} + q(y) \right] u(x, y) = \lambda u(1-x, 1-y) \\ u|_{x=0} = 0, \quad u|_{y=1} = 0. \end{cases} \quad (15)$$

Решения этой задачи ищем в виде

$$u(x, y) = v(x) \cdot \omega(y). \quad (17)$$

Тогда из граничного условия имеем

$$\begin{aligned} u|_{x=0} = v(0) \cdot \omega(y) = 0, & \Rightarrow v(0) = 0; \\ u|_{y=1} = v(x) \cdot \omega(1) = 0, & \Rightarrow \omega(1) = 0. \end{aligned}$$

Подставив (17) в уравнение (15), имеем

$$\frac{\left[\frac{\partial}{\partial x} + p(x) \right] v(x)}{v(1-x)} \cdot \frac{\left[\frac{\partial}{\partial y} + q(y) \right] \omega(y)}{\omega(1-y)} = \lambda.$$

Разделив переменных получим две спектральные задачи:

$$\text{I. } \begin{cases} v'(x) + p(x)v(x) = \mu v(1-x), \\ v(0) = 0. \end{cases}$$

$$\text{II. } \begin{cases} \omega'(y) + q(y)\omega(y) = \nu \omega(1-y), \\ \omega(1) = 0. \end{cases}$$

Если $u(y)$ является решением спектральной задачи

$$\begin{cases} u'(y) = \nu u(1-y), \\ u(1) = 0. \end{cases} \quad (18)$$

и $q(y) + q(1-y) = 0$, то функция

$$\omega(y) = e^{\int_y^1 q(\xi) d\xi} u(y)$$

является решением спектральной задачи II. В самом деле

$$\begin{aligned} \omega'(y) = u'(y)e^{\int_y^1 q(\xi) d\xi} - q(y)e^{\int_y^1 q(\xi) d\xi} u(y), & \Rightarrow \\ \omega'(y) + q(y)\omega(y) = u'(y)e^{\int_y^1 q(\xi) d\xi}. \end{aligned}$$

Пусть $Sy = y(1-x)$, тогда

$$S[\omega'(y) + q(y)\omega(y)] = e^{\int_y^1 q(\xi) d\xi} u'(1-y) = e^{\int_y^1 q(\xi) d\xi} \cdot \lambda u(1-y) = \lambda \omega(y),$$

$$\omega'(y) + q(y)\omega(y) = \lambda \omega(1-y).$$

Далее, из $u(1) = 0$ следует $\omega(1) = 0$, таким образом, нам осталось решить задачу (18)

$$\begin{cases} u'(x) = \nu u(1-x), \\ u(1) = 0. \end{cases}$$

Чтобы воспользоваться уже известными ранее результатами сделаем замену переменного, полагая

$$v(x) = u(1-x), \quad v'(x) = -u'(1-x), \quad -v'(1-x) = u',$$

$$\begin{cases} -v'(1-x) = vv(x) \\ v(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v'(1-x) = -vv(x), \\ v(0) = 0. \end{cases}$$

Из леммы 4 нам известно, что

$$v_n(x) = B_n \cdot \sin\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right)x, \text{ следовательно,}$$

$$v_n(x) = v_n(1-x) = B_n \cdot \sin\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right)(1-x) = B_n \cdot \sin\left[n\pi + \frac{\pi}{2} - \left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right)x\right] =$$

$$= B_n \cdot \cos\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right)x \cdot \cos n\pi = (-1)^n B_n \cdot \cos\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right)x.$$

Вычислим собственных значений

$$v_n' = B_n \left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \cos\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right)x,$$

$$v_n(1-x) = B_n \cdot \sin\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right)(1-x) = (-1)^n B_n \cos\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right)x,$$

$$v_n' = \left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right)(-1)^n v_n(1-x) = -\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right)(-1)^{n+1} v_n(1-x), \quad \Rightarrow$$

$$v_n = (-1)^{n+1} \left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right).$$

Таким образом, решением спектральной задачи (18) является функции

$$u_n(y) = c_n \cos\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right)y,$$

а собственными значениями числа: $v_n = (-1)^{n+1} \left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right)$, где c_n - нормировочные коэффициенты. Вычислим этих коэффициентов

$$\|u_n\|^2 = |c_n|^2 \int_0^1 \cos^2\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right)y dy = \frac{|c_n|^2}{2} \int_0^1 [1 + \cos(2n\pi + \pi)y] dy =$$

$$= \frac{|c_n|^2}{2} y + \frac{\sin(2n\pi + \pi)y}{2n\pi + \pi} \Big|_0^1 \frac{|c_n|^2}{2} = 1, \quad c_n = \sqrt{2}.$$

Для полной убедительности проверим ортогональность этих собственных функций

$$(u_n, u_m) = 2 \int_0^1 \cos\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right)y \cdot \cos\left(m\pi + \frac{\pi}{2}\right)y dy =$$

$$= \int_0^1 \left[\cos\left(n\pi + \frac{\pi}{2} + m\pi + \frac{\pi}{2}\right)y + \cos\left(n\pi + \frac{\pi}{2} - m\pi - \frac{\pi}{2}\right)y \right] dy =$$

$$= \int_0^1 \{ \cos[(n+m)\pi + \pi]y + \cos(n-m)\pi y \} dy =$$

$$= \left[\frac{\sin(n+m+1)y}{n+m+1} + \frac{\sin(n-m)\pi y}{n-m} \right] \Big|_0^1 = 0, \text{ при } n \neq m.$$

Нами доказана следующая лемма 2.5.

Лемма 2.5. Собственными функциями спектральной задачи

$$\begin{cases} \omega'(y) + q(y)\omega(y) = \nu\omega(1-y), & y \in (0,1) \\ \omega(1) = 0, \end{cases}$$

$$q(y) + q(1-y) = 0$$

является функции

$$\omega(y) = 2e^{\int_y^1 q(\xi)d\xi} \cdot \cos\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right)y, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

а собственными значениями

$$\nu_n = (-1)^{n+1} \cdot \left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Теорема 2.2. Если $H = L_2(0, 1)$, и $q(x)$ -непрерывная вещественная функция, удовлетворяющая условию

$$q(x) + q(1-x) = 0,$$

то собственные функций краевой задачи

$$\begin{cases} y'(x) + q(x)y = \nu y(1-x), \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

образуют базис Рисса пространства $L_2(0, 1)$.

Доказательство теоремы, очевидным образом, следует из леммы 2.5.

Подытожим результаты полученных лемм [2.1-2.5], в виде следующей теоремы,

Теорема 2.3. Если $H = L_2(0, 1)$ и

$$(1) p(x) + p(1-x) = 0,$$

$$(2) q(y) + q(1-y) = 0$$

то спектральная задача

$$\begin{cases} \left[\frac{\partial}{\partial x} + p(x)\right] \left[\frac{\partial}{\partial y} + q(y)\right] u(x, y) = \lambda u(1-x, 1-y) \\ u|_{x=0} = 0, u|_{y=1} = 0 \end{cases}$$

имеет бесконечное множество собственных значений:

$$\lambda_{nm} = \pi^2 (-1)^{n+m+1} \left(n + \frac{1}{2}\right) \left(m + \frac{1}{2}\right), \quad n, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

и соответствующих им собственных функций:

$$u_{nm}(x, y) = 2e^{\int_y^1 q(t)dt - \int_0^x p(t)dt} \cdot \sin\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right)x \cdot \cos\left(m\pi + \frac{\pi}{2}\right)y,$$

которые образуют базис Рисса пространства $L_2(D)$.

3. Результаты исследования

Теперь вернемся к первоначальной задаче (3)+(4). Действуя оператором S :

$Su(x, y) = u(1 - x, 1 - y)$ на уравнение (3), получим

$$S \left[\frac{\partial}{\partial x} + p(x) \right] \left[\frac{\partial}{\partial y} + q(y) \right] u(x, y) = Sf(x, y) = f(1 - x, 1 - y). \quad (19)$$

Разложив функцию $u(x, y)$, и $f(1 - x, 1 - y)$ по собственным функциям спектральной задачи (15)+(16), имеем

$$f(1 - x, 1 - y) = \sum_{n, m=-\infty}^{+\infty} f_{nm} u_{nm}(x, y),$$

$$u(x, y) = \sum_{n, m=-\infty}^{+\infty} a_{nm} u_{nm}(x, y). \quad (20)$$

где f_{nm}, a_{nm} - соответствующие коэффициенты Фурье. Подставив (20) в (19), получим

$$\sum_{n, m=-\infty}^{+\infty} \lambda_{nm} a_{nm} u_{nm}(x, y) = \sum_{n, m=-\infty}^{+\infty} f_{nm} u_{nm}(x, y), \Rightarrow$$

$$a_{nm} = \frac{f_{nm}}{\lambda_{nm}}.$$

Следовательно,

$$u(x, y) = \sum_{n, m=-\infty}^{+\infty} \frac{f_{nm}}{\lambda_{nm}} u_{nm}(x, y).$$

Теорема 3.1. Если $H = L_2(0, 1)$ и

$$(a) p(x) + p(1 - x) = 0, (b) q(y) + q(1 - x) = 0,$$

то задача Гурса

$$\begin{cases} \left[\frac{\partial}{\partial x} + p(x) \right] \left[\frac{\partial}{\partial y} + q(y) \right] u(x, y) = f(x, y), & (x, y) \in D \\ u|_{x=0} = 0, u|_{y=1} = 0 \end{cases}$$

сильно разрешима в пространстве $L_{2,\rho}(D)$ с весом, и для решения $u(x, y)$ имеет место представление

$$u(x, y) = \sum_{n, m=-\infty}^{+\infty} \frac{f_{nm}}{\lambda_{nm}} u_{nm}(x, y),$$

$$u_{nm}(x, y) = 2 \exp \left[\int_y^1 q(t) dt - \int_0^x p(t) dt \right] \cdot \sin \left(n\pi + \frac{\pi}{2} \right) x \cdot \cos \left(m\pi + \frac{\pi}{2} \right) y,$$

$$\lambda_{nm} = \pi^2(-1)^{n+m+1} \left(n + \frac{1}{2}\right) \left(m + \frac{1}{2}\right), \quad n, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

где f_{nm} -коэффициенты Фурье функции $f(1-x, 1-y)$ по системе $\{u_{nm}\}$.

Скалярное произведение в пространстве $L_{2,\rho}(D)$ имеет вид

$$(f, g) = \int_0^1 \int_0^1 \exp \left[\int_y^1 q(t) dt - \int_0^x p(t) dt \right] f(x, y) g(x, y) dx dy.$$

Следующая лемма многим известно, все же, для полноты изложения приводим его доказательство.

Лемма 3.1. Пусть $q(x)$ периодическая с периодом 1 функция т.е., $q(x+1)=q(x)$. Тогда для того чтобы функция

$$Q(x) = \int_0^x q(t) dt$$

было периодической функцией с периодом равном 1-це необходимо и достаточно, чтобы

$$\int_0^1 q(t) dt = 0.$$

Доказательство.

(а) Необходимость. Пусть $Q(x)$ периодическая функция с периодом равном единице, т.е. $Q(x) = Q(1+x)$. Тогда

$$\begin{aligned} \int_0^x q(t) dt &= \int_0^{1+x} q(t) dt = \int_0^1 q(t) dt + \int_1^{1+x} q(t) dt; \\ \int_1^{1+x} q(t) dt &= \left| \begin{matrix} t = 1 + \xi \\ dt = d\xi \end{matrix} \right| = \int_0^x q(1 + \xi) d\xi = \int_0^x q(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Следовательно

$$\int_0^x q(t) dt = \int_0^1 q(t) dt + \int_0^x q(\xi) d\xi.$$

Отсюда очевидно, что $\int_0^1 q(t) dt = 0$.

(б) Достаточность. Допустим, что имеет место равенства: $q(x) = q(x+1)$, $\int_0^1 q(t) dt = 0$.

Тогда

$$\begin{aligned} Q(1+x) &= \int_0^{1+x} q(t) dt = \int_0^1 q(t) dt + \int_1^{1+x} q(t) dt = \\ &= \int_1^{1+x} q(t) dt = \left| \begin{matrix} t = 1 + \xi \\ dt = d\xi \end{matrix} \right| = \int_0^x q(1 + \xi) d\xi = \int_0^x q(\xi) d\xi = Q(x). \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Следствие 3.1. Если $p(x), q(y)$ вещественные непрерывные функций удовлетворяющие условиям:

$$p(x) + p(1 - x) = 0, q(y) + q(1 - y) = 0,$$

то функций

$$P(x) = \int_0^x p(t)dt, \quad Q(y) = \int_y^1 q(t)dt$$

периодичны с периодами равными единице.

Доказательство. Покажем, что при выполнении условия (1) имеет место равенство

$$\int_0^1 p(t)dt = 0.$$

Из условия (1), имеем

$$\int_0^1 p(t)dt + \int_0^1 p(1-t)dt = 0; \quad \int_0^1 p(1-t)dt = \left| \begin{array}{l} \xi = 1-t \\ d\xi = -dt \\ t = 1-\xi \end{array} \right| = -\int_1^0 p(\xi)d\xi = \int_0^1 p(\xi)d\xi,$$

Следовательно,

$$2 \int_0^1 p(t)dt = 0 \Rightarrow \int_0^1 p(t)dt = 0.$$

Далее,

$$Q(y) = \int_0^1 q(t)dt + \int_0^y q(t)dt = -\int_0^y q(t)dt.$$

Следствие 3.2. Собственные функций спектральной задачи (15) +(16) периодичны с периодом $T=2$.

Доказательство.

$$\begin{aligned} u_{nm}(x, y) &= 2 \exp \left[\int_y^1 q(t)dt - \int_0^x p(t)dt \right] \cdot \sin \left(n\pi + \frac{\pi}{2} \right) x \cdot \cos \left(m\pi + \frac{\pi}{2} \right) y, \\ u_{nm}(x + 2, y + 2) &= 2 \exp \left[\int_y^1 q(t)dt - \int_0^x p(t)dt \right] \cdot \sin \left[2n\pi + \pi + \left(n\pi + \frac{\pi}{2} \right) x \right] \cdot \\ &\quad \cos \left[2m\pi + \pi + \left(m\pi + \frac{\pi}{2} \right) y \right] = \\ &= 2 \exp \left[\int_y^1 q(t)dt - \int_0^x p(t)dt \right] \cdot \sin \left(n\pi + \frac{\pi}{2} \right) x \cdot \cos \left(m\pi + \frac{\pi}{2} \right) y = u_{nm}(x, y). \end{aligned}$$

Сформулируем полученную окончательную теорему.

Теорема 3.2. Пусть, $H = L_2(D)$, и $p(x), q(y), f(x, y)$ вещественные непрерывные функций. Если выполняются условия:

- (a) $p(x) + p(1 - x) = 0$,
- (b) $q(y) + q(1 - x) = 0$,
- (c) $f(x, y) \in C_0(D)$;

то задача Гурса

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} + p(x) \right] \left[\frac{\partial}{\partial y} + q(y) \right] u(x, y) = f(x, y), \quad (x, y) \in D$$
$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{y=1} = 0$$

имеет единственное периодическое решение, с периодом $T=2$.

4. Обсуждение.

Некорректность задачи Дирихле волнового уравнения $u_{xx} - u_{yy} = 0$ в области D [см. Рис.2] общеизвестна, с операторной точки зрения волновой оператор имеет непрерывный спектр, т.е., ноль является бесконечнократным собственным значением, аналогичным свойством обладает и периодическая задача, поэтому мы обратили свое внимание на задачу Гурса.

5. Выводы.

Волновые уравнения описывают волновые процессы: распространение звука, электромагнитных волн, волн на воде, радиоволн и т.п. Известны случаи, когда волны малой амплитуды образуют гигантские волны. Такое явление происходит из-за длительности процесса распространения волн, поэтому задача стабилизации решений волнового уравнения при $t \rightarrow +\infty$ имеет важное практическое значение. Один из признаков стабилизации волн их периодичность. Нами установлено, что если внешнее возмущение локализовано т.е. финитно, а коэффициенты волнового уравнения периодичны и нечетны, то решение задачи Гурса допускает периодическое продолжение на всю плоскость независимых переменных.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Hadamard J. On some topics connected with linear partial differential equations, Proc. Benares Math. Soc, 1921, 3, p. 39—48.
- [2] Burgin D., Duffin R. The Dirichlet problem for the vibrating string equation, Bull. Amer. Math. Soc, 1939, iv, 45, p. 851—858.
- [3] Арнольд В. И. Малые знаменатели, I.—Изв. АН СССР. Сер. матем., 1961, т. 25, № 1, с. 21-86.
- [4] Бобик О.И., Бондарчук П.И., Пташник Б. И. Элементы качественной теории дифференциальных уравнений в частных производных. Киев, 1972. 175 с.
- [5] Sleeman B. D. Boundary value problems for the vibrating string equation.— Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 1981, v. A-88, Us. 1—2, p. 185—194.
- [6] Мосолов П. П. О задаче Дирихле для уравнений в частных производных. Известия высших учебных заведений, 1960 Математика № 3 (16), с. 213-218.
- [7] Соболев С.Л. Пример корректной краевой задачи для уравнения колебания струны с данными на всей границе, ДАН-СССР, 1956, т. 109, JM» 4, с. 707-709.
- [8] Березанский Ю. М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. Киев, 1965. 800 с.
- [9] Александрян Р. А. Спектральные свойства операторов, порожденных системами дифференциальных уравнений типа С Л. Соболева.—Тр. Моск. матем. о-ва, 1960, т. 9, с. 455—505.
- [10] Кальменов Т.Ш. О регулярных краевых задачах для волнового уравнения, Диффенц. уравнения. 1981, т. 17, №6, с. 1105-1121.
- [11] Кальменов Т.Ш. О спектре одной самосопряженной задачи для волнового уравнения, Весник А.Н. Каз ССР, 1982, №2, с. 63-66.
- [12] Садыбеков М.И., Кальменов Т.Ш. О задаче Дирихле и нелокальных краевых задачах для волнового уравнения, Диффенц. уравнения, 1990, т. 26, №1, с. 60-65.
- [13] Кальменов Т.Ш. Краевые задачи для линейных уравнений в частных производных гиперболического типа, Шымкент: Гылым, 1993, 327с.
- [14] Бурский В. П. Краевые задачи для гиперболического уравнения второго порядка в круге, Известия. вузов. Матем., 1987, номер 2, 22—29.
- [15] Бурский В.П. О ядре дифференциального оператора с постоянными коэффициентами младшего порядка в круге, ВИНТИ, № 3792—82 Деп., 1982.
- [16] Саргсян Г.А. О полиномиальных решениях задачи Дирихле для гиперболических уравнений с постоянными коэффициентами в круге, Доклады национальной академии наук Армении, Том 112, 2012, № 4.

[17] Кальменов Т.Ш., Ахметова С.Т., Шалданбаев А.Ш. К спектральной теории уравнений с отклоняющимся аргументом // Математический журнал, Алматы.- 2004.- Т. 4, № 3. - С. 41-48.

[18] Ибраймулов А.М. О спектральных свойствах краевой задачи для уравнения с отклоняющимся аргументом // Известия АН.Каз.ССР, сер.физ.-мат.- 1988.- № 3.- С. 22-25.

[19] Kal'menov T. Sh., and Shaldanbaev A. Sh., On a criterion of solvability of the inverse problem of heat conduction, Journal of Inverse and Ill-Posed Problems 18, 352-369 (2010).

[20] Orazov I, A. Shaldanbayev, and M. Shomanbayeva, About the Nature of the Spectrum of the Periodic Problem for the Heat Equation with a Deviating Argument, Abstract and Applied Analysis, Volume 2013 (2013), Article ID 128363, 6 pages, <http://dx.doi.org/10.1155/2013/128363>.

[21] Шалданбаев А.Ш. Спектральные разложения корректных-некорректных начально краевых задач для некоторых классов дифференциальных уравнений.- Монография. 193с, LAP LAMBERT Academic Publishing. <http://dnb.dnb.de>. Email:info@lap-publishing.com,Saarbrucken 2011,Germanu.

[22] Allaberen Ashyralyev, Abdizhahan M. Sarsenbi, Well-posedness of an Elliptic Equation with Involution, Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 2015 (2015), No. 284, pp. 1-8.ISSN: 1072-6691. URL: <http://ejde.math.txstate.edu> or <http://ejde.math.unt.edu> or <http://ejde.math.txstate.edu>.

[23] Садыбеков М.А.,Сарсенби А.М.,Решение основных спектральных вопросов всех краевых задач для одного дифференциального уравнения первого порядка с отклоняющимся аргументом,Uzbek Mathematical Journal, 2007,№3, pp.1-6.

[24] Sadybekov, M. A.; Sarsenbi, A. M.; Mixed problem for a differential equation with involution under boundary conditions of general form. AIP Conference Proceedings. Ed. Ashyralyev, and A; Lukashov, A. Vol. 1470, 225-227, 2012.

УДК517.956.32

М.И. Ақылбаев, А. Бейсебаева, А. Ш. Шалданбаев

¹Аймақтық әлеуметтік-инновациялық университеті;

²ЮКГУ им. М.Ауезова, г. Шымкент

КОЭФФИЦИЕНТТЕРІ АЙНЫМАЛЫ ТҮРІ АРНАЙЫ ТОЛҚЫН ТЕНДЕУІНІҢ ГУРСАЛЫҚ ЕСЕБІНІҢ ПЕРИОДТЫ ШЕШІМІ ТУРАЛЫ

Аннотация. Бұл еңбекте коэффициенттері айнымалы ал түрі арнайы толқын тендеуіне қойылған Гурсаның есебі шешілді. Шешімнің спектралді кейпі табылды, мұндай жағдай вольтерлі есептерге тән емес. Бұл үшін көмекші есеп ретінде аргументі ауытқыған дифференциалдық тендеу қолданылды. Мынадай, $Su(x)=u(1-x)$, операторлардың Шмидтің операторының қызметін атқаратыны көрсетілген

Тірек сөздер: Вольтерлік операторлар, индефинитті метрика, Гурсаның есебі, ұқсастық операторы, спектр, спектралдік таралым, Фүренің әдісі, ортогоналді базис, Гилберт-Шмидтің теоремасы.

UDC 517.956.32

M.I. Akylbayev,¹ A. Beysebayeva,² A. Sh. Shaldanbayev²

¹Regional Social-Innovational University, Shymkent;

²M. Auezov South Kazakhstan State University, Shymkent.

ON THE PERIODIC SOLUTION OF THE GOURSAT PROBLEM FOR A WAVE EQUATION OF A SPECIAL FORM WITH VARIABLE COEFFICIENTS

Abstract. In this work the task of Goursat in a characteristic quadrangle for a wave equation of an express view with variable coefficients is solved. The spectral impression of the decision not traditional for such Voltaire tasks is gained. For this purpose as a vvvspomogoalny task the spectral task for the equation is used with we otklonyashchitsya by an argument. It is shown that the operator of a type of $Su(x)=u(1-x)$ plays a role of the operator Schmidt встречающиеся in decomposition of Voltaire operators.

Keywords: Volterra operators, indefinite metric, Goursat problem, similarity operators, spectrum, spectral decomposition, Fourier method, orthogonal basis, the Hulbert-Schmidt theorem.

Сведения об авторах:

Ақылбаев М.И.- к.т.н., проректор филиала «Отырар»ШАПУ доцент г. Шымкент;

Бейсебаева А., преподаватель кафедры «Математики» Южно-Казахстанского государственного университета им. М.Ауезова, г. Шымкент;

Шалданбаев А. Ш. – д.ф.-м.н., профессор кафедры «Математики» Южно-Казахстанского государственного университета им. М.Ауезова, г. Шымкент.

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 1, Number 317 (2018), 130 – 141

УДК 539.2/.6

К.Б. Джакупов

Институт математики и математического моделирования МОН РК, Алматы, Казахстан
Казахский Национальный Университет им.Аль-Фараби

НЕЛИНЕЙНЫЙ ЗАКОН ГУКА В ТЕОРИИ УПРУГОСТИ НЕОДНОРОДНЫХ И АНИЗОТРОПНЫХ ТЕЛ

Аннотация. Непосредственно из физической связи с нелинейным законом Гука выводятся компоненты тензора напряжений твердого деформируемого тела и новые нелинейные уравнения теории упругости с несимметричным тензором напряжений, как частный случай получаются уравнения с линейным законом Гука. Гипотеза Ламе и уравнения Ламе не имеют физической связи с законом Гука, в этом заключается их фальшивость. Ламе взял за основу приближенную формулу неполного дифференциала и предположил в своей гипотезе пропорциональность компонент тензора напряжений симметричной половине данного неполного дифференциала смещения, причем антисимметричная половина дифференциала отбрасывается, следствием чего является фальшивая симметричность тензора напряжений Ламе. Новые нелинейные уравнения аппроксимируются явной схемой, с применением которой численно рассчитано упругое состояние плоского бруска при действующих на верхней грани нормальном и касательном напряжениях. Такая же схема применена для уравнений Ламе. Полученные картины распределения смещений наглядно демонстрируют различие решений сравниваемых систем уравнений упругости, а также несоответствие решения уравнений Ламе данному состоянию деформируемого тела. Теоретически и физически подтверждена фальшивость уравнений Ламе.

Ключевые слова: растяжение, касательное, нормальное, напряжения, тензор.

1. Касательные напряжения по обобщенному закону Гука

Закон Гука - утверждение, согласно которому деформация, возникающая в упругом теле, пропорциональна приложенной силе. Открыт в 1660 году английским учёным Робертом Гуком.

Следует иметь в виду, что закон Гука выполняется только при малых деформациях. При превышении предела пропорциональности связь между напряжениями и деформациями становится **нелинейной**.

Для многих сред закон Гука неприменим даже при малых деформациях.

Вывод динамических уравнений с несимметричным тензором напряжений по *линейному* закону Гука дан в [1]: $\mathbf{F} = k\mathbf{u}$, $k > 0$, $F_x = u_i$, $F_y = v_j$, $F_z = w_k$, $\mathbf{u} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k}$ – вектор перемещения, где $\mathbf{F} = \mathbf{F}_x + \mathbf{F}_y + \mathbf{F}_z$ – *внешняя* сила, вызывающая перемещение.

В неоднородных средах, составленных из тел с различными упругими свойствами или в **анизотропных** телах, свойства которых зависят от направления, закон Гука может быть *нелинейным* типа

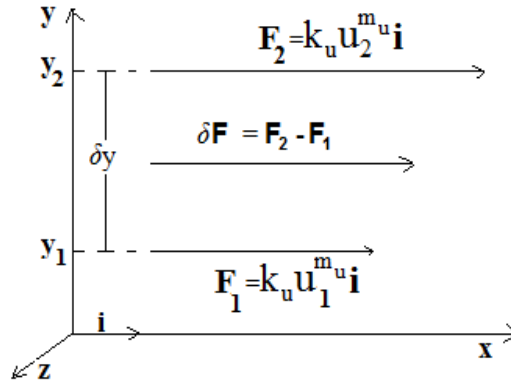
$$\mathbf{F} = k_u u^{m_u} \mathbf{i} + k_v v^{m_v} \mathbf{j} + k_w w^{m_w} \mathbf{k}, \quad k_u > 0, k_v > 0, k_w > 0 \quad (1.1)$$

При показателях степеней, равных 1 и $k_u = k_v = k_w = k$, (1.1) переходит в линейный закон Гука для изотропной среды, следовательно, показатели степеней должны быть *нечетными* числами [2], что будет подтверждено ниже свойствами гиперболических уравнений упругости.

Пусть на плоскости u_1 сила связана с перемещением по обобщенному закону $\mathbf{F}_1 = k_u u_1^{m_u} \mathbf{i}$, аналогично сила $\mathbf{F}_2 = k_u u_2^{m_u} \mathbf{i}$ на плоскости $y_2 = y_1 + \delta y$, $\delta y > 0$.

Приращения сил и перемещений между слоями равны:

$$\delta \mathbf{F} = \mathbf{F}_2 - \mathbf{F}_1 = k_u u_2^{m_u} \mathbf{i} - k_u u_1^{m_u} \mathbf{i} = k_u \delta u^{m_u} \mathbf{i}, \quad \delta u^{m_u} = u_2^{m_u} - u_1^{m_u} > 0.$$



Пусть $|\mathbf{F}_2| > |\mathbf{F}_1|$, в этом случае приращение силы направлено по оси x: $\delta \mathbf{F} \uparrow \uparrow \mathbf{i}$. Вводится линейная плотность $\mathbf{f} = \delta \mathbf{F} / \delta y$, $\delta \mathbf{F} = \delta y \mathbf{f}$. По определению средний вектор касательного напряжения $\mathbf{p}_{\text{ухср}} = \frac{\delta \mathbf{F}}{\delta x \delta z}$ параллелен и одинаково направлен с силой, вызывающей данное напряжение $\mathbf{p}_{\text{ухср}} \uparrow \uparrow \delta \mathbf{F}$, $\mathbf{p}_{\text{ухср}} \uparrow \uparrow \mathbf{f}$.

Введением коэффициента пропорциональности образуются связи:

$$\mathbf{f} = k' \mathbf{p}_{\text{ухср}}, \quad k' > 0, \quad \delta y \mathbf{f} = k' \mathbf{p}_{\text{ухср}} \delta y, \quad \mathbf{p}_{\text{ухср}} \uparrow \uparrow \mathbf{i},$$

$$k' \mathbf{p}_{\text{ухср}} \delta y = k_u \delta u^{m_u} \mathbf{i}$$

Данное выражение умножается скалярно на орт \mathbf{i} :

$$(k' \mathbf{p}_{\text{ухср}} \delta y, \mathbf{i}) = (k_u \delta u^{m_u} \mathbf{i}, \mathbf{i})$$

В результате получаются

$$(k' \mathbf{p}_{\text{ухср}} \delta y, \mathbf{i}) = k' |\mathbf{p}_{\text{ухср}}| \delta y |\mathbf{i}| \cos 0^\circ = k' \mathbf{p}_{\text{ухср}} \delta y, \quad (k_u \delta u^{m_u} \mathbf{i}, \mathbf{i}) = k_u \delta u^{m_u}$$

Равенства

$$k' \mathbf{p}_{\text{ухср}} \delta y = k_u \delta u^{m_u}, \quad \mathbf{p}_{\text{ухср}} = \frac{k_u}{k'} \frac{\delta u^{m_u}}{\delta y}$$

в пределе дают касательное напряжение

$$p_{yx} = \lim_{\delta y \rightarrow 0} \frac{k_u}{k'} \frac{\delta u^{m_u}}{\delta y} = \mu_u \frac{\partial u^{m_u}}{\partial y}, \quad \mu_u = \frac{k_u}{k'} > 0$$

Касательные напряжения по другим направлениям аналогичны:

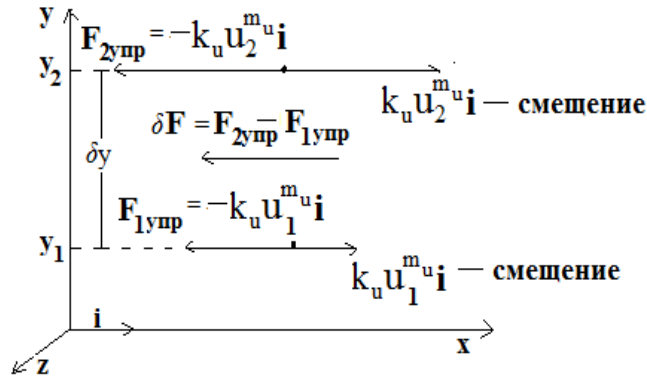
$$p_{xy} = \mu_v \frac{\partial v^{m_v}}{\partial x}, \quad p_{zx} = \mu_u \frac{\partial u^{m_u}}{\partial z}, \quad p_{xz} = \mu_w \frac{\partial w^{m_w}}{\partial x}, \quad p_{yz} = \mu_w \frac{\partial w^{m_w}}{\partial y}, \quad p_{zy} = \mu_v \frac{\partial v^{m_v}}{\partial z}$$

Формулы *несимметричных* касательных напряжений выведены для вызывающей растяжение тела *внешней* силы $\mathbf{F} = \mathbf{F}_x + \mathbf{F}_y + \mathbf{F}_z$.

Упругая сила в деформируемом теле по третьему закону Ньютона равна внешней силе со знаком минус $\mathbf{F}_{\text{упр}} = -\mathbf{F}$. Следовательно, линейный закон Гука для сил упругости будет иметь вид $\mathbf{F}_{\text{упр}} = -k\mathbf{u}$, $\mathbf{F}_{\text{упр}} = -k_u\mathbf{i} - k_v\mathbf{j} - k_w\mathbf{k}$.

Аналогичное представление для нелинейного закона Гука

$$\mathbf{F}_{\text{упр}} = -k_u u^{m_u} \mathbf{i} - k_v v^{m_v} \mathbf{j} - k_w w^{m_w} \mathbf{k}$$



Пусть на плоскости y_1 сила связана с перемещением по нелинейному закону $\mathbf{F}_{1\text{упр}} = k_u u_1^{m_u} \mathbf{i}$, аналогично сила $\mathbf{F}_{2\text{упр}} = k_u u_2^{m_u} \mathbf{i}$ на плоскости $y_2 = y_1 + \delta y$, $\delta y > 0$.

Приращения сил и перемещений между слоями равны:

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{F} &= \mathbf{F}_{2\text{упр}} - \mathbf{F}_{1\text{упр}} = \\ &= -k_u u_2^{m_u} \mathbf{i} + k_u u_1^{m_u} \mathbf{i} = -k_u \delta u^{m_u} \mathbf{i}, \\ \delta u^{m_u} &= u_2^{m_u} - u_1^{m_u} > 0. \end{aligned}$$

Пусть $|\mathbf{F}_2| > |\mathbf{F}_1|$, в этом случае приращение силы направлено против оси x : $\delta \mathbf{F} \uparrow \downarrow \mathbf{i}$. Вводится линейная плотность $\mathbf{f} = \delta \mathbf{F} / \delta y$, $\delta \mathbf{F} = \delta y \mathbf{f}$.

По определению средний вектор касательного напряжения $\mathbf{p}_{\text{ухср}} = \frac{\delta \mathbf{F}}{\delta \sigma}$, $\delta \sigma = \delta x \delta z$

параллелен и одинаково направлен с силой, вызывающей данное напряжение $\mathbf{p}_{\text{ухср}} \uparrow \uparrow \delta \mathbf{F}$, $\mathbf{p}_{\text{ухср}} \uparrow \uparrow \mathbf{f}$.

Введением коэффициента пропорциональности образуются связи:

$$\mathbf{f} = k' \mathbf{p}_{\text{ухср}}, k' > 0, \delta y \mathbf{f} = k' \mathbf{p}_{\text{ухср}} \delta y, \mathbf{p}_{\text{ухср}} \uparrow \downarrow \mathbf{i}, k' \mathbf{p}_{\text{ухср}} \delta y = -k_u \delta u^{m_u} \mathbf{i}$$

Данное выражение умножается скалярно на орт \mathbf{i} :

$$(k' \mathbf{p}_{\text{ухср}} \delta y, \mathbf{i}) = -(k_u \delta u^{m_u} \mathbf{i}, \mathbf{i})$$

В результате получаются

$$(k' \mathbf{p}_{\text{ухср}} \delta y, \mathbf{i}) = k' |\mathbf{p}_{\text{ухср}}| \delta y |\mathbf{i}| \cos 180^\circ = -k' p_{\text{ухср}} \delta y, -(k_u \delta u^{m_u} \mathbf{i}, \mathbf{i}) = -k_u \delta u^{m_u} \quad \text{Равенства}$$

$$k' p_{yxcp} \delta y = k_u \delta u^{m_u}, p_{yxcp} = \frac{k_u}{k'} \frac{\delta u^{m_u}}{\delta y}$$

в пределе дают касательное напряжение

$$p_{yx} = \lim_{\delta y \rightarrow 0} \frac{k_u}{k'} \frac{\delta u^{m_u}}{\delta y} = \mu_u \frac{\partial u^{m_u}}{\partial y}, \mu_u = \frac{k_u}{k'} > 0$$

Касательные напряжения по другим направлениям аналогичны:

$$p_{xy} = \mu_v \frac{\partial v^{m_v}}{\partial x}, p_{zx} = \mu_u \frac{\partial u^{m_u}}{\partial z}, p_{xz} = \mu_w \frac{\partial w^{m_w}}{\partial x}, p_{yz} = \mu_w \frac{\partial w^{m_w}}{\partial y}, p_{zy} = \mu_v \frac{\partial v^{m_v}}{\partial z}$$

Таким образом, формулы напряжений для внешних сил совпадают с формулами воздействия упругих сил, поэтому дальнейшие выводы делаются только для внешних сил.

2. Связь нормальных напряжений с законом Гука

Аналогичными рассуждениями устанавливается формула составляющей \mathbf{p}_{xx}^0 нормального напряжения $\mathbf{p}_{xx} = \lambda \operatorname{div} \mathbf{i} + \mathbf{p}_{xx}^0$.

Пусть внешние силы равны: $\mathbf{F}_1 = k_u u_1^{m_u} \mathbf{i}$ на плоскости X_1 и $\mathbf{F}_2 = k_u u_2^{m_u} \mathbf{i}$ на плоскости $X_2 = X_1 + \delta x, \delta x > 0$. Приращения сил и перемещений:

$$\delta \mathbf{F} = \mathbf{F}_2 - \mathbf{F}_1 = k_u u_2^{m_u} \mathbf{i} - k_u u_1^{m_u} \mathbf{i} = k_u \delta u^{m_u} \mathbf{i}, \delta u^{m_u} = u_2^{m_u} - u_1^{m_u} > 0.$$

По определению напряжений имеют место $\mathbf{p}_{xxcp}^0 = \frac{\delta \mathbf{F}}{\delta \sigma}, \delta \sigma = \delta y \delta z$ и одинаковая направленность векторов $\delta \mathbf{F} \uparrow \uparrow \mathbf{i}$ в силу $|\mathbf{F}_2| > |\mathbf{F}_1|$.

Через линейную плотность

$$\mathbf{f} = \frac{\delta \mathbf{F}}{\delta x}, \delta \mathbf{F} = \delta x \mathbf{f}, \mathbf{f} = k'' \mathbf{p}_{xxcp}^0$$

образуются равенства $\delta \mathbf{F} = k'' \delta x \mathbf{p}_{xxcp}^0, k'' \delta x \mathbf{p}_{xxcp}^0 = k_u \delta u^{m_u} \mathbf{i}$.

Данное выражение умножается скалярно на орт \mathbf{i} :

$$(k'' \delta x \mathbf{p}_{xxcp}^0, \mathbf{i}) = (k_u \delta u^{m_u} \mathbf{i}, \mathbf{i})$$

Векторы параллельны по структуре $\mathbf{p}_{xxcp}^0 \uparrow \uparrow \mathbf{i}$.

Поэтому имеют место в скалярных произведениях

$$(k'' \delta x \mathbf{p}_{xxcp}^0, \mathbf{i}) = k'' \delta x |\mathbf{p}_{xxcp}^0| \cdot |\mathbf{i}| \cdot \cos 0^\circ = k'' \delta x p_{xxcp}^0, (k_u \delta u^{m_u} \mathbf{i}, \mathbf{i}) = k_u \delta u^{m_u}.$$

В результате получается $k'' \delta x p_{xxcp}^0 = k_u \delta u^{m_u}$, откуда $p_{xxcp}^0 = \frac{k_u}{k''} \frac{\delta u^{m_u}}{\delta x}$.

В пределе вытекает формула составляющей нормального напряжения

$$p_{xx}^0 = \lim_{\delta x \rightarrow 0} \frac{k_u}{k''} \frac{\delta u^{m_u}}{\delta x} = \mu_u \frac{\partial u^{m_u}}{\partial x}, \mu_u = \frac{k_u}{k''}.$$

Такими же рассуждениями выводятся составляющие нормальных напряжений и по другим

направлениям: $p_{ii}^0 = \mu_i \frac{\partial u_i^{m_i}}{\partial x_i}$, $\mu_i = \frac{k_i}{k^n}$, $i=1,2,3$; $u_1 \equiv u, u_2 \equiv v, u_3 \equiv w, x_1 \equiv x, x_2 \equiv y, x_3 \equiv z$.

Такие же формулы нормальных напряжений получаются для сил упругости в твердом деформируемом теле $\mathbf{F}_{упр} = -\mathbf{F}$.

Таким образом, нелинейному закону Гука соответствует *несимметричный* тензор напряжений в твердом деформируемом теле:

$$p_{ji} = \delta_{ji} \lambda \operatorname{div} \mathbf{u} + \mu_i \varepsilon_{ji}, \quad \varepsilon_{ji} = \frac{\partial u_i^{m_i}}{\partial x_j}, \quad i, j=1,2,3, \quad (2.1)$$

$\mathbf{u} = u_1 \mathbf{i} + u_2 \mathbf{j} + u_3 \mathbf{k}$ - вектор перемещения. В нормальных напряжениях $\lambda \delta_{ji} \operatorname{div} \mathbf{u}$ по Ламе сохраняется, δ_{ji} - символ Кронеккера.

3. О фальсификациях и непригодности уравнений Ламе в нелинейной теории упругости анизотропных тел

Линейные уравнения теории упругости твердого деформируемого тела

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \rho_0 \mathbf{F} + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} + \mu \Delta \mathbf{u} \quad (3.1)$$

построены по гипотезе Ламе о *симметричности* тензора напряжений

$$p_{ji} = \lambda \delta_{ji} \operatorname{div} \mathbf{u} + 2\mu \varepsilon_{ji}, \quad \varepsilon_{ji} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad p_{ji} = p_{ij}, \quad i, j=1,2,3, \quad (3.2)$$

λ, μ - коэффициенты Ламе.

Гипотеза Ламе заключается в том, что элементы ε_{ji} тензора деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}$ должны быть равны *удвоенному* симметричному тензору скоростей деформаций, то есть *удвоенной* первой половине искусственной формулы

$$du_i = \sum_{j=1}^3 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] dx_j \right], \quad i=1,2,3, \quad (3.3)$$

(вторая антисимметричная половина (3.3) игнорируется [3-11]).

Формула (3.3) образована из неполного дифференциала смещений

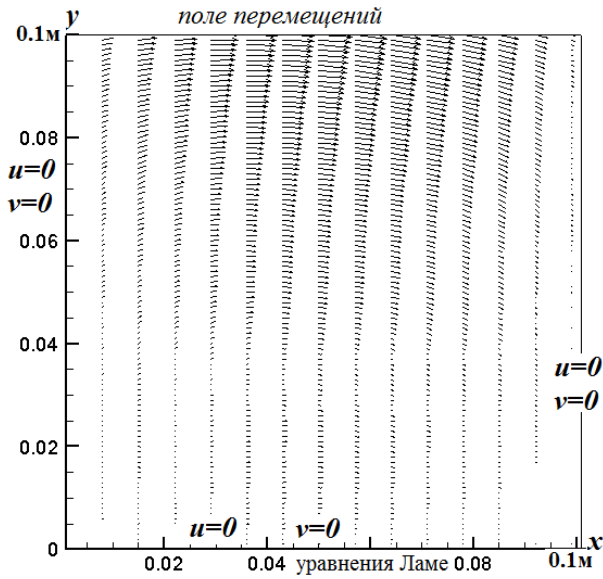
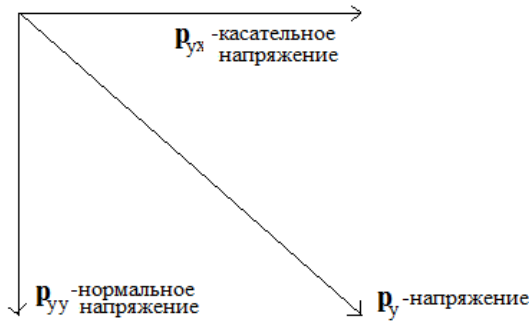
$$\tilde{d}u_i = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j, \quad i=1,2,3, \quad (3.4)$$

(Вот полный дифференциал: $d\mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} dt + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_j} dx_j = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} dt + \tilde{d}\mathbf{u}$).

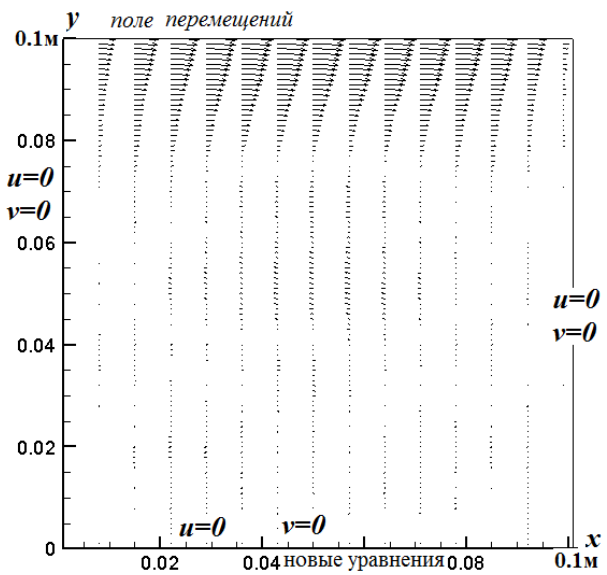
Таким образом, в [3-12] тензор напряжений Ламе (3.2) не соответствует и не вытекает из закона Гука. Очевидно, уже по построению не годится в анизотропных средах, тем более в нелинейном законе Гука.

Изложенный выше физический метод автора построения тензора напряжений упругого тела по закону Гука противоположен гипотезе Ламе и в точности следует определению, данному С.П. Тимошенко в [3]: «*Основная задача теории упругости заключается в том, чтобы по заданным действующим на твердое тело внешним силам находить те изменения формы, которые тело*

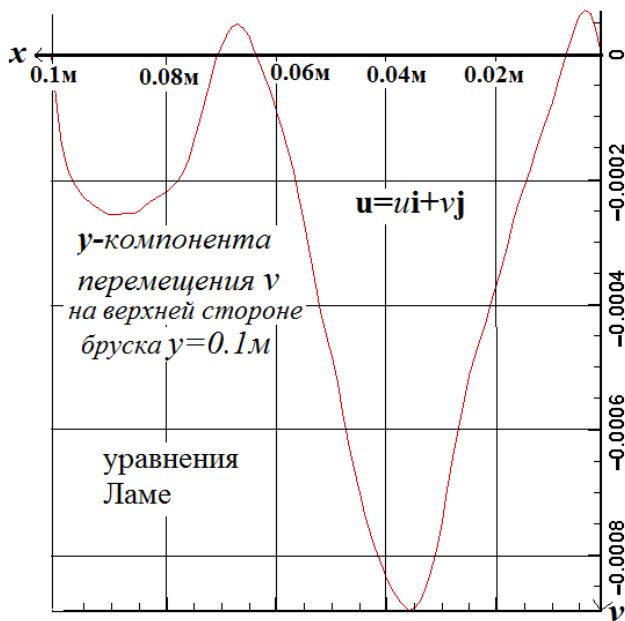
претерпевает, и те внутренние силы упругости, которые при этих изменениях формы возникают между частями тела».



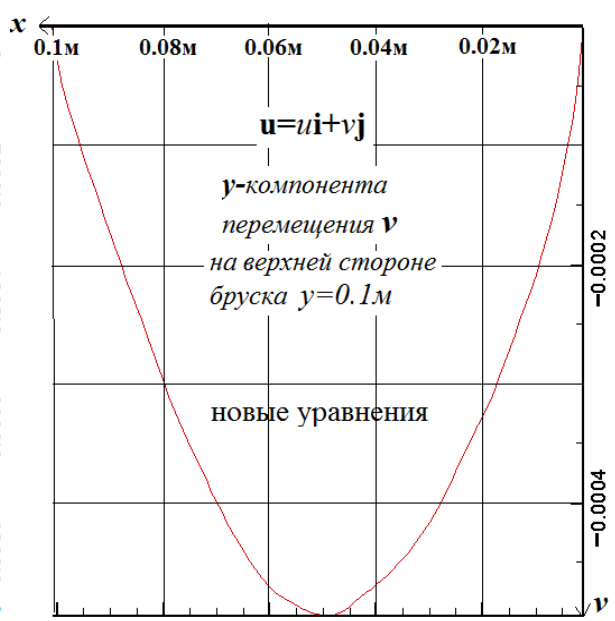
Фигура 1



Фигура 2



Фигура 3



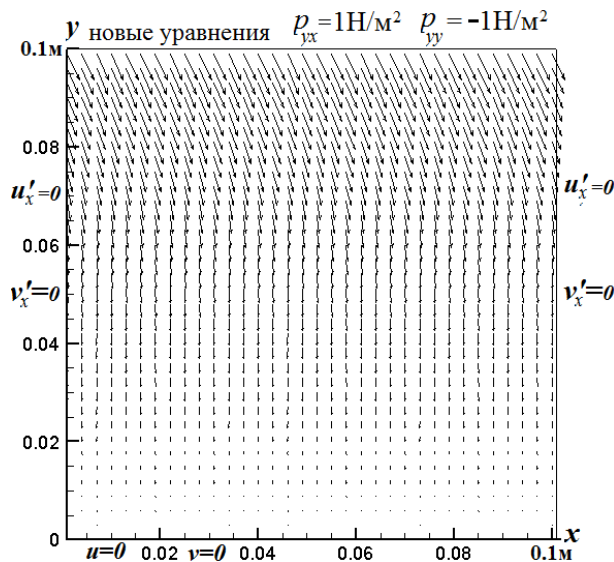
Фигура 4

Для сравнения уравнений Ламе (3.1) с новыми уравнениями с несимметричным тензором напряжений в изотропном теле $\mu_u = \mu_v = \mu_w = \mu$:

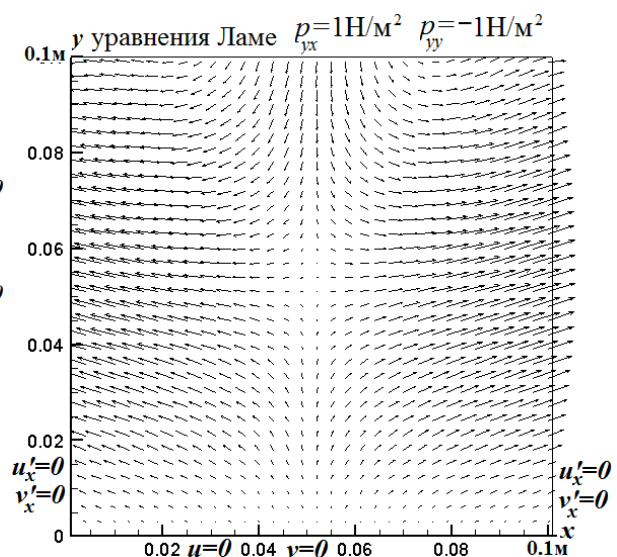
$$\rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \rho_0 \mathbf{F} + \lambda \text{graddiv} \mathbf{u} + \mu \Delta \mathbf{u} \quad (3.5)$$

выполнен расчет перемещений в квадратном деформируемом бруске размером 0.1м на 0.1м.

Вектор внешней силы $\mathbf{p}_y = \mathbf{p}_{yx} + \mathbf{p}_{yy} = p_{yx} \mathbf{i} + p_{yy} \mathbf{j}$ направлен под углом к верхней плоскости бруска. На фиг. 1 и 2 представлены поля векторов перемещений $\mathbf{u} = u \mathbf{i} + v \mathbf{j}$, на фиг. 3 и 4 эпюры поперечной скорости на верхней стороне бруска, всё на момент времени $t=121.38$ с. Плотность тела $\rho_0 = 7800 \text{ кг/м}^3$. Конкретно положено $p_{yy} = -1 \text{ Н/м}^2$, $p_{yx} = 10 \text{ Н/м}^2$. Остальные грани бруска жестко закреплены, смещения на них равны нулю. Коэффициенты Ламе выбраны равными $\lambda = 1 \text{ кз/(с}^2\text{м)}$, $\mu = 100 \text{ кз/(с}^2\text{м)}$. Двумерные уравнения Ламе (3.1) и новые уравнения (3.5) реализованы по явным схемам [2] на сетке 100×100 с шагом по времени равным 0.0005 с . Подтверждено явное различие между численными решениями, в особенности вертикальных перемещений на верхней стороне бруска на фиг. 3 и 4.



Фигура 5



Фигура 6

На фиг. 4 перемещение частиц верхней стороны бруска $y=0.1$ м происходит вниз, что подтверждается отрицательными значениями поперечного перемещения v по новым уравнениям. На фиг. 3 по уравнениям Ламе имеются положительные значения поперечной составляющей перемещения, что противоречит направлению действия внешней силы.

На фиг. 5 поле перемещений по новым уравнениям, на фиг. 6 поле перемещений по уравнениям Ламе. Напряжения действуют на всей верхней стороне бруска. Результаты фиг. 1 - 6 практически подтверждают фальшивость уравнений Ламе с симметричным тензором напряжений.

4. Уравнения нелинейной анизотропной теории упругости по обобщенному закону Гука с несимметричным тензором напряжений

Вытекающие из линейного закона Гука [1], элементы тензора деформаций $\varepsilon_{ji} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$, $i, j = 1, 2, 3$ равны непосредственно коэффициентам неполного дифференциала (3.4).

Несимметричный тензор напряжений обобщенного закона Гука

$$p_{ji} = \delta_{ji} \lambda \operatorname{div} \mathbf{u} + \mu_i \varepsilon_{ji}, \quad \varepsilon_{ji} = \frac{\partial u_i^{m_i}}{\partial x_j}, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (4.1)$$

в уравнениях динамики сплошной среды в напряжениях

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \rho_0 F_i + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial p_{ji}}{\partial x_j}, \quad i = 1, 2, 3$$

образуют нелинейные уравнения с показателями степени по обобщенному закону Гука

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \rho_0 F_i + \lambda \frac{\partial}{\partial x_i} \operatorname{div} \mathbf{u} + \mu_i \Delta u_i^{m_i}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (4.2)$$

5. Обоснование нечетности целых показателей степени

Уравнения (4.2) декартовых координатах

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \rho_0 F_i + \lambda \frac{\partial}{\partial x_i} \operatorname{div} \mathbf{u} + \mu_i \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 u_i^{m_i}}{\partial x_j^2}, \quad i = 1, 2, 3$$

представляются в дифференцированном виде

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \rho_0 F_i + \lambda \frac{\partial}{\partial x_i} \operatorname{div} \mathbf{u} + \mu_i \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i^{m_i}}{\partial x_j} \right), \quad i = 1, 2, 3,$$

где $\frac{\partial u_i^{m_i}}{\partial x_j} = m_i u_i^{m_i-1} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$.

Очевидно эквивалентные уравнения

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \rho_0 F_i + \lambda \frac{\partial}{\partial x_i} \operatorname{div} \mathbf{u} + \mu_i \frac{\partial}{\partial x_j} \left(m_i u_i^{m_i-1} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right), \quad i = 1, 2, 3 \quad (5.1)$$

являются уравнениями гиперболического типа только для нечетных показателей степени $m_i = 1; 3; 5; 7; 9$ и *т.д.*, $m_1 \equiv m_u, m_2 \equiv m_v, m_3 \equiv m_w$ ибо всегда $m_i u_i^{m_i-1} \geq 0$.

6. Явная схема уравнений анизотропной нелинейной теории упругости

Рассматривается задача Коши-Дирихле для новых уравнений

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \rho_0 F_x + \lambda \frac{\partial p}{\partial x} + \mu_u \Delta u^{m_u}, \\ \rho_0 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= \rho_0 F_y + \lambda \frac{\partial p}{\partial y} + \mu_v \Delta v^{m_v}, \\ \rho_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \rho_0 F_z + \lambda \frac{\partial p}{\partial z} + \mu_w \Delta w^{m_w}, \\ p &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \end{aligned}$$

с начальными условиями:

$$\begin{aligned} u|_{t=0} &= d_u(\mathbf{r}), v|_{t=0} = d_v(\mathbf{r}), w|_{t=0} = d_w(\mathbf{r}), \\ \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} &= d_{uu}(\mathbf{r}), \frac{\partial v}{\partial t}|_{t=0} = d_{vv}(\mathbf{r}), \frac{\partial w}{\partial t}|_{t=0} = d_{ww}(\mathbf{r}) \end{aligned}$$

и краевыми условиями на границе S :

$$u|_S = q_u(\mathbf{r}), v|_S = q_v(\mathbf{r}), w|_S = q_w(\mathbf{r}),$$

В области интегрирования задается равномерная сетка

$\bar{\Omega}_h = \{x_i = ih_x, y_j = jh_y, z_k = kh_z, 0 \leq i \leq N_x, 0 \leq j \leq N_y, 0 \leq k \leq N_z\}$, и сетка по времени $\bar{\Omega}_\tau = \{t_n = n\tau, n = 0, 1, \dots, N_\tau\}$.

Обозначения сеточных функций: $f_{ijk}^n \equiv f(x_i, y_j, z_k, t_n)$.

Начальные условия задаются во внутренних узлах:

$$u_{ijk}^0 = d_{uijk}, v_{ijk}^0 = d_{vijk}, w_{ijk}^0 = d_{wijk},$$

$$u_{ijk}^1 = d_{uijk} + \tau d_{uiijk}, v_{ijk}^1 = d_{vijk} + \tau d_{vvijk}, w_{ijk}^1 = d_{wijk} + \tau d_{wwijk},$$

$$1 \leq i \leq N_x - 1, 1 \leq j \leq N_y - 1, 1 \leq k \leq N_z - 1$$

Явная разностная схема:

$$Q_{uijk}^n = \mu_u \left[\frac{(u_{i-1jk}^n)^{m_u} - 2(u_{ijk}^n)^{m_u} + (u_{i+1jk}^n)^{m_u}}{h_x^2} + \frac{(u_{ij-1k}^n)^{m_u} - 2(u_{ijk}^n)^{m_u} + (u_{ij+1k}^n)^{m_u}}{h_y^2} + \right. \\ \left. + \frac{(u_{ijk-1}^n)^{m_u} - 2(u_{ijk}^n)^{m_u} + (u_{ijk+1}^n)^{m_u}}{h_z^2} + \rho_0 F_{xijk} \right],$$

$$Q_{vijk}^n = \mu_v \left[\frac{(v_{i-1jk}^n)^{m_v} - 2(v_{ijk}^n)^{m_v} + (v_{i+1jk}^n)^{m_v}}{h_x^2} + \frac{(v_{ij-1k}^n)^{m_v} - 2(v_{ijk}^n)^{m_v} + (v_{ij+1k}^n)^{m_v}}{h_y^2} + \right. \\ \left. + \frac{(v_{ijk-1}^n)^{m_v} - 2(v_{ijk}^n)^{m_v} + (v_{ijk+1}^n)^{m_v}}{h_z^2} + \rho_0 F_{yijk} \right],$$

$$Q_{wijk}^n = \mu_w \left[\frac{(w_{i-1jk}^n)^{m_w} - 2(w_{ijk}^n)^{m_w} + (w_{i+1jk}^n)^{m_w}}{h_x^2} + \frac{(w_{ij-1k}^n)^{m_w} - 2(w_{ijk}^n)^{m_w} + (w_{ij+1k}^n)^{m_w}}{h_y^2} + \right. \\ \left. + \frac{(w_{ijk-1}^n)^{m_w} - 2(w_{ijk}^n)^{m_w} + (w_{ijk+1}^n)^{m_w}}{h_z^2} + \rho_0 F_{zijk} \right],$$

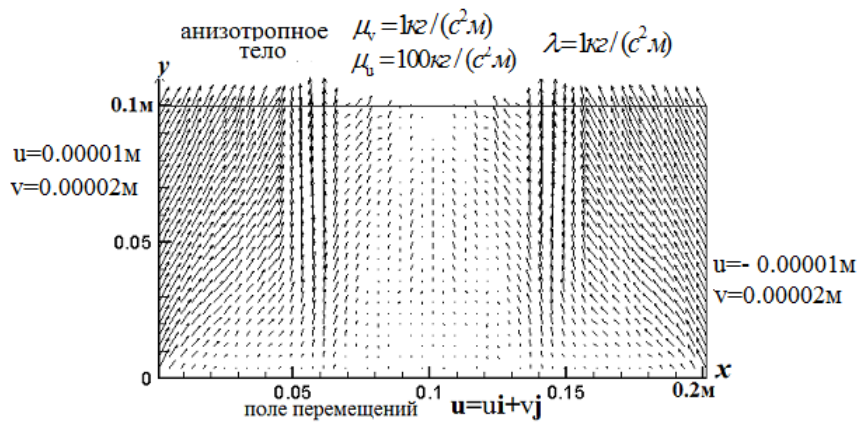
$$\rho_0 \frac{u_{ijk}^{n+1} - 2u_{ijk}^n + u_{ijk}^{n-1}}{\tau^2} = Q_{uijk}^n + \lambda \left(\frac{u_{i-1jk}^n - 2u_{ijk}^n + u_{i+1jk}^n}{h_x^2} + \right. \\ \left. + \frac{v_{i+1j+1k}^n - v_{i+1j-1k}^n - v_{i-1j+1k}^n + v_{i-1j-1k}^n}{4h_x h_y} + \frac{w_{i+1jk+1}^n - w_{i+1jk-1}^n - w_{i-1jk+1}^n + w_{i-1jk-1}^n}{4h_x h_z} \right),$$

$$\rho_0 \frac{v_{ijk}^{n+1} - 2v_{ijk}^n + v_{ijk}^{n-1}}{\tau^2} = Q_{vijk}^n + \lambda \left(\frac{v_{ij-1k}^n - 2v_{ijk}^n + v_{ij+1k}^n}{h_y^2} + \right. \\ \left. + \frac{u_{i+1j+1k}^n - u_{i+1j-1k}^n - u_{i-1j+1k}^n + u_{i-1j-1k}^n}{4h_x h_y} + \frac{w_{ij+1k+1}^n - w_{ij+1k-1}^n - w_{ij-1k+1}^n + w_{ij-1k-1}^n}{4h_z h_y} \right),$$

$$\rho_0 \frac{W_{ijk}^{n+1} - 2W_{ijk}^n + W_{ijk}^{n-1}}{\tau^2} = Q_{wijk}^n + \lambda \left(\frac{W_{ijk-1}^n - 2W_{ijk}^n + W_{ijk+1}^n}{h_z^2} + \right. \\ \left. + \frac{u_{i+1,jk+1}^n - u_{i+1,jk-1}^n - u_{i-1,jk+1}^n + u_{i-1,jk-1}^n}{4h_x h_z} + \frac{v_{ij+1,k+1}^n - v_{ij+1,k-1}^n - v_{ij-1,k+1}^n + v_{ij-1,k-1}^n}{4h_z h_y} \right), \\ i=1, \dots, N_x - 1, j=1, \dots, N_y - 1, k=1, \dots, N_z - 1$$

Данная схема имеет погрешность 2-го порядка по всем переменным $O(\tau^2) + O(h_x^2) + O(h_y^2) + O(h_z^2)$. Устойчивость схемы обеспечивается выполнением условия Куранта:

$$\frac{\tau^2 \mu}{h_x^2 + h_y^2 + h_z^2} \leq 1$$

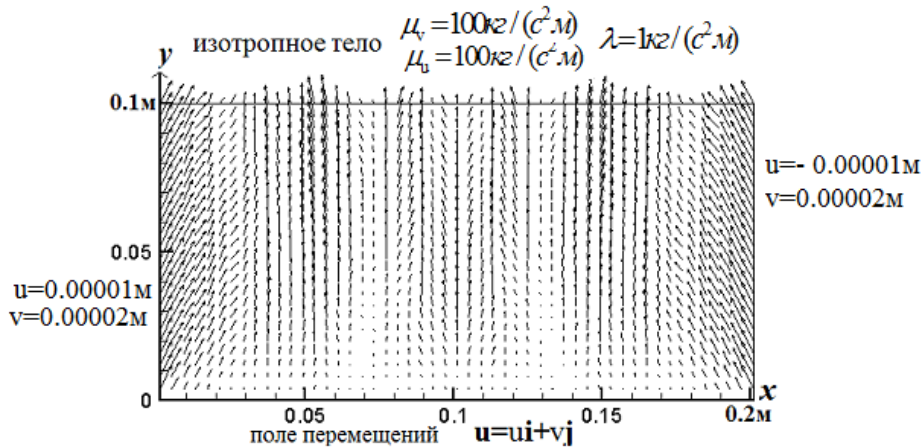


Фигура 7

На фиг.7 представлено поле перемещений по линейному закону Гука в $m_u = 1, m_v = 1$ анизотропном теле, на фиг.8 в изотропном теле. На верхней плоскости

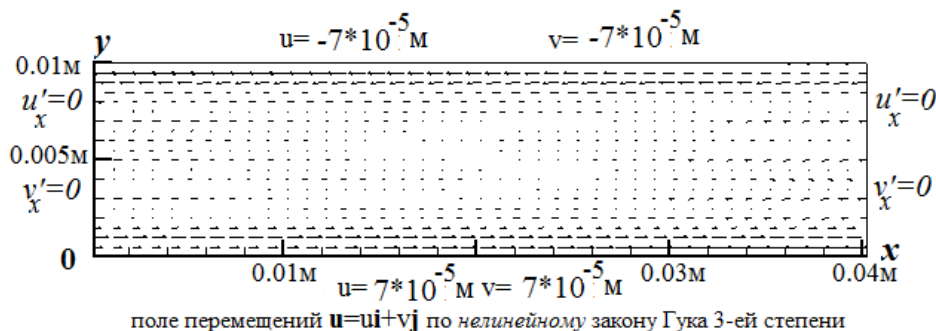
бруска ставится краевое условие Неймана $\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \frac{\partial v}{\partial y} = 0$.

Очевидно, различие в коэффициентах μ_v приводит к разным полям перемещений, следовательно, к различным полям внутренних напряжений.



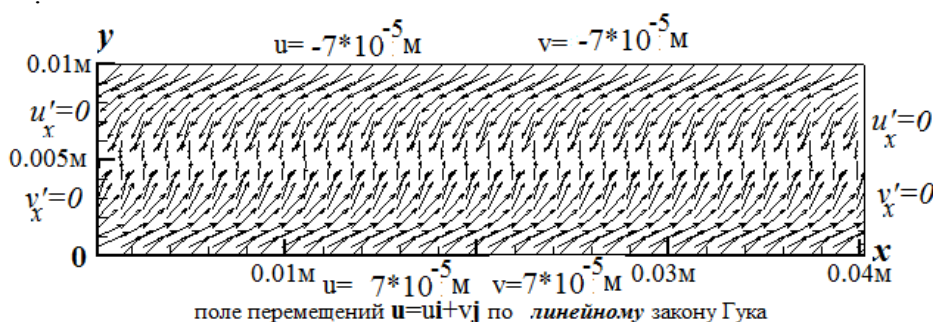
Фигура 8

На фиг.9 представлено поле перемещений в анизотропном теле по *нелинейному* степенному закону Гука $m_u = 3, m_v = 3$. На горизонтальных сторонах бруска заданы перемещения, на боковых сторонах ставятся краевые условия Неймана $\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \frac{\partial v}{\partial x} = 0$. Коэффициенты Ламе в анизотропном бруске: $\lambda = 104.4 \text{ кг} / (\text{с}^2 \text{ м}), \mu_u = 80 \text{ кг} / (\text{с}^2 \text{ м}), \mu_v = 40 \text{ кг} / (\text{с}^2 \text{ м})$



Фигура 9

На фиг. 10 представлено поле перемещений в анизотропном теле по *линейному* закону Гука $m_u = 1, m_v = 1$



Фигура 10

Выводы

Физические выводы нормальных и касательных напряжений доказывают *несимметричность* тензора напряжений в твердом деформируемом теле как для изотропного закона Гука так и анизотропного, в том числе нелинейного. Конкретные примеры численных расчетов состояния упругого тела показывают неадекватность и несостоятельность гипотезы о *симметричности* тензора напряжений сплошной среды и соответственно уравнений теории упругости Ламе.

Несимметричность тензора напряжений открывает широкие возможности для моделирования перемещений в твердом деформируемом теле, что пока-зано на применении закона Гука в анизотропном теле фиг. 7 и нелинейного закона Гука фиг. 9.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Джакупов К.Б. Моделирование по закону Гука в теории упругости. Несимметричность тензора напряжений //Известия НАН РК, серия физ.-мат., 6(310), ноябрь - декабрь 2016 г. с.96-103. ISSN 2518-1726 (Online), ISSN 1991-346X (Print)
- [2] Джакупов К.Б. Ликвидация фальсификаций и модернизация основ механики сплошной среды- Алматы: Изд-во «Гылым ордасы», 2017г. С.435. ISBN 978-601-280-859-9
- [3] Тимошенко С.П. Теория упругости. М.: «Наука»,1979г. 851 с.
- [4] Мейз Дж. Теория и задачи механики сплошных сред. М.: Мир, 1974г. 318 с.
- [5] Седов Л.И. Механика сплошной среды, т.1. М.: «Наука»,1973г. 315 с.

- [6] Лурье А.И. Теория упругости. М.: «Наука», 1970г. 984 с.
 [7] Ильюшин А.А. Механика сплошной среды. М.: Изд-во МГУ, 1978 г. 287 с.
 [8] Ильюшин А.А., Победра Б.Е. Основы математической теории термовязко-упругости. М.: «Наука», 1970 г. 547 с.
 [9] Ilyushin A.A., Lenski V.S. Strength of Materials. N.Y. Pergamon press, 1967.
 [10] Eringen A.C. Mechanics of Continua. N.Y., Wiley, 1967.
 [11] Новацкий В. Теория упругости. М.: «Мир», 1975.
 [12] Ломакин В.А. Теория упругости неоднородных тел. М.: Изд-во МГУ, 1976.
 [13] Джакупов К.Б. Закон Гука в теории упругости анизотропных тел // Известия НАН РК, серия физ.-мат., 4(424), июль - август 2017 г. с.241-252. ISSN 2518-1726 (Online), ISSN 1991-346X (Print)

К. Б. Жақып-тегі

ҚР БҒМ Математика және математикалық моделдеу институты, Алматы, Қазақстан
 Әл-Фараби атындағы ҚазҰУ

СЫЗЫҚСЫЗ ГУКТЫҢ ЗАҢЫ БІРТЕКТЕС ЕМЕС ЖӘНЕ АНИЗОТРОПТЫҚ ДЕНЕЛЕРДІҢ СЕРПІЛІМДІК ТЕОРИЯСЫНДА

Аннотация. Тікелей сызықсыз Гук заңымен қатты майысқақ денелердің кернеулер тензорының компоненттері шығарылған. Ламенің екінші еселешінің бағыттан тәуелділігі есептелген. Майысқақ қатты дененің серпілімдік теориясының кернеулер тензорының беттеспегендігі дәлелденген. Осыған сәйкес майысқақ қатты дененің сызықсыз серпілімдік теориясының теңдеулері жасалынған. Ламе гипотезасында толық емес жылжу дифференциалының беттескен жартысы қана пайдаланғаны көрсетілген, екінші антибеттескен жартысы лақтырылынған, соның салдарынан Ламе кернеулер тензорының беттескендігі шыққан. Жаңа теңдеулер үшін 2 ретгі нақтылығы бар айқын схема жасалынған, соны пайдаланып жазық жолақтың серпілімдік күйі саналған, үстіңгі жақтауының ортасыны жанама кернеулер және тік кернеулер әсер еткенде. Дәл сондай схема Ламе теңдеулеріне де қолдалынған. Саналған жылжулардың үлестірулік суреттері салыстырынып жатқан теңдеулердің айырмашылықтарын бейнелейді және Ламе теңдеулерінің майысқақ қатты дененің күйіне сәйкес еместігін көрсетеді. Ламе теңдеулерінің жалғандығы теориялық және физикалық тұрпатта бекітілген.

Тірек сөздер. анизотроптылық, созылу, кернеулер, тензор, теңдеулер.

К.В. Jakupov

Institute of mathematics and mathematical modeling, Almaty, Kazakhstan,
 Kazak National University named after Al-Farabi

NONLINEAR HOOKE LAW IN THE THEORY OF ELASTICITY OF INHOMOGENEOUS AND ANISOTROPIC BODIES

Abstract. Directly from the physical connection with the nonlinear Hooke law, the components of the stress tensor of a rigid deformable body and new nonlinear equations of the theory of elasticity with an asymmetric stress tensor are derived, as a special case, we obtain equations with the linear Hooke's law. The Lamé hypothesis and Lamé's equations do not have a physical connection with Hooke's law, this is their falsehood. Lamé took as a basis the approximate formula of the incomplete differential and suggested in his hypothesis the proportionality of the stress tensor components to the symmetrical half of the given incomplete differential of displacement, and the antisymmetrical half of the differential is discarded, which is the result of the false symmetry of the Lamé stress tensor. The new nonlinear equations are approximated by an explicit scheme, with the use of which the elastic state of a flat bar is numerically calculated with the normal and tangential stresses acting on the upper face. The same scheme is applied to the Lamé equations. The obtained patterns of displacements distribution clearly demonstrate the difference in the solutions of the comparable systems of elasticity equations, as well as the discrepancy between the solution of the Lamé equations for a given state of the deformed body. The falsity of Lamé's equations is confirmed theoretically and physically.

Keywords: tensile, tangent, normal, stress, tensor.

МАЗМУНЫ

<i>Смирнов Е.И., Жохов А.Л., Юнусов А.А., Юнусов А.А., Симонова О.В.</i> Математикалық ұғымдардың және әдістемелік жұмыстардың пайда болу кезеңдерінің мән-мағынасының көрнекі моделду (ағылшын тілінде).....	6
<i>Калмурзаев Б.С., Баженов Н.А.</i> Ершов иерархиясында t -деңгейлердің эквиваленттік қатынастарға енгізулері туралы (ағылшын тілінде).....	14
<i>Байжанов С.С., Құлтешов Б.Ш.</i> Бинарлы предикаттармен есептік-категориялық босаң O -минималдық теориялар байыту туралы (ағылшын тілінде).....	18
<i>Жумаханова А.С., Ногайбаева М.О., Асқарова А., Аришдинова М.Т., Бегалиева К.Б., Қудайкулов А.К., Ташев А.А.</i> Ұзындығы шектеулі тұрақты термомеханикалық күйдің бір мезгілде шектік температураның және бүйірлік жылу алмасу әсері есебін талдамалық шешу (ағылшын тілінде).....	25
<i>Ақылбаев М.И., Бейсебаева А., Шалданбаев А. Ш.</i> Коэффициенттері айнымалы түрі арнайы толқын теңдеуінің Гурсалық есебінің периодты шешімі туралы (ағылшын тілінде).....	34
<i>Байдуллаев С., Байдуллаев С. С.</i> Магнитотеллурлық зондылау әдісінің жағдайын талдау (ағылшын тілінде).....	51
<i>Жақып-тегі К. Б.</i> Сызықсыз Гуктың заңы біртектес емес және анизотроптық денелердің серпілімдік теориясында (ағылшын тілінде).....	63
<i>Юнусов А.А., Дасибеков А., Корганбаев Б.Н., Юнусова А.А., Абдиева З.А., Коспанбеова Н.</i> Терендік бойынша айнымалы деформация модульді грунттер консолидациясының көпөлшемді есептері (ағылшын тілінде).....	75

* * *

<i>Смирнов Е.И., Жохов А.Л., Юнусов А.А., Юнусов А.А., Симонова О.В.</i> Математикалық ұғымдардың және әдістемелік жұмыстардың пайда болу кезеңдерінің мән-мағынасының көрнекі моделду (ағылшын тілінде).....	87
<i>Калмурзаев Б.С., Баженов Н.А.</i> Ершов иерархиясында t -деңгейлердің эквиваленттік қатынастарға енгізулері туралы (орыс тілінде).....	94
<i>Байжанов С.С., Құлтешов Б.Ш.</i> Бинарлы предикаттармен есептік-категориялық босаң O -минималдық теориялар байыту туралы (орыс тілінде).....	98
<i>Жумаханова А.С., Ногайбаева М.О., Асқарова А., Аришдинова М.Т., Бегалиева К.Б., Қудайкулов А.К., Ташев А.А.</i> Ұзындығы шектеулі тұрақты термомеханикалық күйдің бір мезгілде шектік температураның және бүйірлік жылу алмасу әсері есебін талдамалық шешу (орыс тілінде).....	106
<i>Ақылбаев М.И., Бейсебаева А., Шалданбаев А. Ш.</i> Коэффициенттері айнымалы түрі арнайы толқын теңдеуінің Гурсалық есебінің периодты шешімі туралы (орыс тілінде).....	114
<i>Жақып-тегі К. Б.</i> Сызықсыз Гуктың заңы біртектес емес және анизотроптық денелердің серпілімдік теориясында (орыс тілінде).....	130

СОДЕРЖАНИЕ

<i>Смирнов Е.И., Жохов А.Л., Юнусов А.А., Юнусова А.А., Симонова О.В.</i> Наглядное моделирование этапов проявления сущности математических понятий и методических процедур (на английском языке).....	6
<i>Калмурзаев Б.С., Баженов Н.А.</i> О Вложимости - степеней в отношении эквивалентности в иерархии Ершова (на английском языке).....	14
<i>Байжанов С.С., Кулешов Б.Ш.</i> Об обогащении счетно-категоричных слабо О-минимальных теорий бинарными предикатами (на английском языке).....	18
<i>Жумаханова А.С., Ногайбаева М.О., Аскарлова А., Аришдинова М.Т., Бегалиева К.Б., Кудайкулов А.К., Ташев А.А.</i> Аналитическое решение задачи о установившемся термомеханическом состоянии стержня ограниченной длины при одновременном наличии концевых температур и боковых теплообмена (на английском языке).....	25
<i>Ақылбаев М.И., Бейсебаева А., Шалданбаев А. Ш.</i> О периодическом решении задачи Гурса для волнового уравнения специального вида с переменными коэффициентами (на английском языке).....	34
<i>Байдуллаев С., Байдуллаев С. С.</i> Анализ состояния метода магнитотеллурического зондирования (на английском языке).....	51
<i>Джакупов К.Б.</i> Нелинейный закон Гука в теории упругости неоднородных и анизотропных тел (на английском языке).....	63
<i>Юнусов А.А., Дасибеков А., Корганбаев Б.Н., Юнусова А.А., Абдиева З.А., Коспанбеова Н.</i> Многомерные задачи консолидации грунтов с переменным по глубине модулем деформации (на английском языке).....	75

* * *

<i>Смирнов Е.И., Жохов А.Л., Юнусов А.А., Юнусова А.А., Симонова О.В.</i> Наглядное моделирование этапов проявления сущности математических понятий и методических процедур (на русском языке).....	87
<i>Калмурзаев Б.С., Баженов Н.А.</i> О Вложимости - степеней в отношении эквивалентности в иерархии Ершова (на русском языке).....	94
<i>Байжанов С.С., Кулешов Б.Ш.</i> Об обогащении счетно-категоричных слабо О-минимальных теорий бинарными предикатами (на русском языке).....	98
<i>Жумаханова А.С., Ногайбаева М.О., Аскарлова А., Аришдинова М.Т., Бегалиева К.Б., Кудайкулов А.К., Ташев А.А.</i> Аналитическое решение задачи о установившемся термомеханическом состоянии стержня ограниченной длины при одновременном наличии концевых температур и боковых теплообмена (на русском языке).....	106
<i>Ақылбаев М.И., Бейсебаева А., Шалданбаев А. Ш.</i> О периодическом решении задачи Гурса для волнового уравнения специального вида с переменными коэффициентами (на русском языке).....	114
<i>Джакупов К.Б.</i> Нелинейный закон Гука в теории упругости неоднородных и анизотропных тел (на русском языке).....	130

CONTENTS

<i>Smirnov E.I., Zhokhov A.L., Yunusov A.A., Yunusov A.A., Simonova O.B.</i> Visual modeling of the manifestation of the essence of mathematical concepts and methodological procedures (in English).....	6
<i>Kalmurzayev B.S., Bazhenov N.A.</i> Embeddability of m -degrees into equivalence relations in the Ershov hierarchy (in English).....	14
<i>Baizhanov S.S., Kulpeshov B.Sh.</i> On expanding countably categorical weakly ω -minimal theories by binary predicates (in English).....	18
<i>Zhumakhanova A.S., Nogaybaeva M.O., Askarova A., Arshidinova M.T., Begaliyeva K.B., Kudaykulov A.K., Tashev A.A.</i> An analytical solution to the problem of the thermomechanical state of a rod of limited length with simultaneous presence of end temperatures and lateral heat exchange (in English).....	25
<i>Akylbayev M.I., Beysebayeva A., Shaldanbayev A. Sh.</i> On the periodic solution of the Goursat problem for a wave equation of a special form with variable coefficients (in English).....	34
<i>Baydullaev S., Baydullaev S. S.</i> Analysis of magnetotelluric sounding (in English).....	51
<i>Jakupov K.B.</i> Nonlinear Hooke law in the theory of elasticity of inhomogeneous and anisotropic bodies (in English).....	63
<i>Yunusov A.A., Dasibekov A., Korganbaev B.N., Yunusova A.A., Abdieva Z.A., Kospanbetova N.A.</i> Multidimensional problems of soils' consolidation with modulus of deformation, variable in its depth (in English)	75

* * *

<i>Smirnov E.I., Zhokhov A.L., Yunusov A.A., Yunusov A.A., Simonova O.B.</i> Visual modeling of the manifestation of the essence of mathematical concepts and methodological procedures (in Russian).....	87
<i>Kalmurzayev B.S., Bazhenov N.A.</i> Embeddability of m -degrees into equivalence relations in the Ershov hierarchy (in Russian).....	94
<i>Baizhanov S.S., Kulpeshov B.Sh.</i> On expanding countably categorical weakly ω -minimal theories by binary predicates (in Russian).....	98
<i>Zhumakhanova A.S., Nogaybaeva M.O., Askarova A., Arshidinova M.T., Begaliyeva K.B., Kudaykulov A.K., Tashev A.A.</i> An analytical solution to the problem of the thermomechanical state of a rod of limited length with simultaneous presence of end temperatures and lateral heat exchange (in Russian)	106
<i>Akylbayev M.I., Beysebayeva A., Shaldanbayev A. Sh.</i> On the periodic solution of the Goursat problem for a wave equation of a special form with variable coefficients (in Russian).....	114
<i>Jakupov K.B.</i> Nonlinear Hooke law in the theory of elasticity of inhomogeneous and anisotropic bodies (in Russian).....	130

**Publication Ethics and Publication Malpractice
in the journals of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan**

For information on Ethics in publishing and Ethical guidelines for journal publication see <http://www.elsevier.com/publishingethics> and <http://www.elsevier.com/journal-authors/ethics>.

Submission of an article to the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan implies that the described work has not been published previously (except in the form of an abstract or as part of a published lecture or academic thesis or as an electronic preprint, see <http://www.elsevier.com/postingpolicy>), that it is not under consideration for publication elsewhere, that its publication is approved by all authors and tacitly or explicitly by the responsible authorities where the work was carried out, and that, if accepted, it will not be published elsewhere in the same form, in English or in any other language, including electronically without the written consent of the copyright-holder. In particular, translations into English of papers already published in another language are not accepted.

No other forms of scientific misconduct are allowed, such as plagiarism, falsification, fraudulent data, incorrect interpretation of other works, incorrect citations, etc. The National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan follows the Code of Conduct of the Committee on Publication Ethics (COPE), and follows the COPE Flowcharts for Resolving Cases of Suspected Misconduct (http://publicationethics.org/files/u2/New_Code.pdf). To verify originality, your article may be checked by the Cross Check originality detection service <http://www.elsevier.com/editors/plagdetect>.

The authors are obliged to participate in peer review process and be ready to provide corrections, clarifications, retractions and apologies when needed. All authors of a paper should have significantly contributed to the research.

The reviewers should provide objective judgments and should point out relevant published works which are not yet cited. Reviewed articles should be treated confidentially. The reviewers will be chosen in such a way that there is no conflict of interests with respect to the research, the authors and/or the research funders.

The editors have complete responsibility and authority to reject or accept a paper, and they will only accept a paper when reasonably certain. They will preserve anonymity of reviewers and promote publication of corrections, clarifications, retractions and apologies when needed. The acceptance of a paper automatically implies the copyright transfer to the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan.

The Editorial Board of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan will monitor and safeguard publishing ethics.

Правила оформления статьи для публикации в журнале смотреть на сайтах:

www.nauka-nanrk.kz

<http://www.physics-mathematics.kz>

ISSN 2518-1726 (Online), ISSN 1991-346X (Print)

Редакторы *М. С. Ахметова, Т. А. Апендиев, Д. С. Аленов*
Верстка на компьютере *А. М. Кульгинбаевой*

Подписано в печать 15.02.2018.
Формат 60x88¹/₈. Бумага офсетная. Печать – ризограф.
9 п.л. Тираж 300. Заказ 1.

Национальная академия наук РК
050010, Алматы, ул. Шевченко, 28, т. 272-13-18, 272-13-19