**NEWS**
OF THENATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
**PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES**
ISSN 1991-346X **https://doi.org/10.32014/2020.2518-1726.11**
Volume 2, Number 330 (2020), 23 – 30

UDK 521.1
MRNTI 41.03.02

**M. Zh. Minglibayev, A.K. Kushekbay**

Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan.
E-mail: minglibayev@gmail.com, kkabylay@gmail.com

# ON THE DYNAMICS OF THREE AXISYMMETRIC BODIES

**Abstract.** It explores the translational and rotational movement of the three free non-stationary axisymmetric celestial bodies with variable mass, size and variable compression interacting according to Newton's law. Newtonian force interaction is characterized by an approximate expression of the force function, which takes into account the second harmonic. Differential equations of translational-rotational motion of three non-stationary axisymmetric bodies with variable mass and size in the relative coordinate system, with the beginning in the center of a more massive body, are given. The axes of inertia of own coordinate system of non-stationary axisymmetric three bodies coincide with the main axes of inertia of the bodies, and it is assumed that their relative orientation remains unchanged during evolution. The mass of bodies are varied isotropically in the different rates. Canonical equations of translational-rotational motion of three non-stationary axisymmetric bodies with variable masses and sizes are obtained in the osculating analogues of the elements of Delaunay-Andoyer. Canonical equations of unperturbed motion and their integrals are given.
**Keywords:** Translational-rotational movement, Variable mass, Three-body problem, Axisymmetric celestial body, Osculating elements, Delaunay-Andoyer elements.

## 1. Introduction

In classical celestial mechanics, real celestial bodies are modeled by a material point (a spherically symmetric body). In cases when such a description of physical phenomena inadequately reflects the essence of a real celestial-mechanical problem, celestial bodies are modeled by a solid body of constant size, mass and unchanged structure [1, 2]. Observational astronomy shows that real celestial bodies are non-point and unsteady. Celestial bodies are non-stationary, in the process of evolution their masses, sizes, shapes and structures will change [1, 3]. In this connection, the creation of mathematical models of the motion of celestial bodies with variable masses, sizes, and shapes becomes relevant.

The purpose of this work is to obtain differential equations of translational-rotational motion of non-stationary three axisymmetric bodies with variable masses, sizes and variable compression in osculating elements based on the equations of motion obtained in our previous work [3]

## 2. Equations of motion in a relative coordinate

Under certain assumptions for the physical problem, the equations of translational-rotational motion of three axisymmetric bodies in the relative coordinate system were obtained in our work [3]. The beginning of the relative coordinate system $G_0xyz$ coincides with the barycenter of the body $T_i$, and the coordinate axes are parallel to the respective axes of coordinate of the absolute coordinate system (see figure 1).

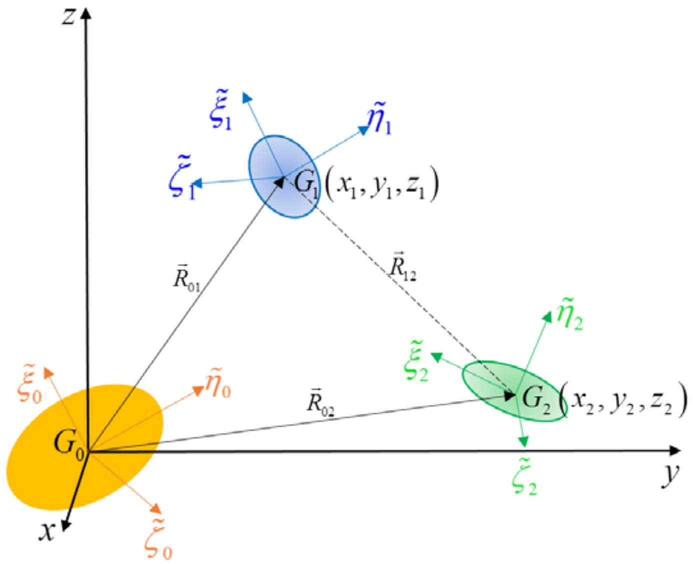


Figure 1 - Bodies in a relative coordinate system $G_0xyz$.

$G_i\tilde{\xi}_i\tilde{\eta}_i\tilde{\zeta}_i$ – own coordinate systems

**2.1. Rotational motion**

Differential equations of the rotational motion of bodies around their own center of mass in the relative coordinate system are written as follows

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}(A_i p_i)-(A_i-C_i)q_i r_i=\left[\frac{\partial U}{\partial \psi_i}-cos\theta_i\frac{\partial U}{\partial \varphi_i}\right]\frac{sin\varphi_i}{sin\theta_i}+cos\varphi_i\frac{\partial U}{\partial \theta_i},\\
&\frac{d}{dt}(A_i q_i)-(C_i-A_i)p_i r_i=\left[\frac{\partial U}{\partial \psi_i}-cos\theta_i\frac{\partial U}{\partial \varphi_i}\right]\frac{cos\varphi_i}{sin\theta_i}-sin\varphi_i\frac{\partial U}{\partial \theta_i},\\
&\frac{d}{dt}(C_i r_i)=\frac{\partial U}{\partial \varphi_i}=0. \qquad\qquad i=0,1,2
\end{aligned} \tag{2.1}$$

where $p_i=\dot{\psi}_i\sin\theta_i\sin\varphi_i+\dot{\theta}_i\cos\varphi_i,\ q_i=\dot{\psi}_i\sin\theta_i\cos\varphi_i-\dot{\theta}_i\sin\varphi_i,\ r_i=\dot{\psi}_i\cos\theta_i+\varphi_i.$ (2.2)

$p_i, q_i, r_i$ – the projections of the angular velocity of the rotational motion of the bodies $T_i$ on the axes of its own coordinate system $G_i\tilde{\xi}_i\tilde{\eta}_i\tilde{\zeta}_i$, $\varphi_i, \psi_i, \theta_i$ - Euler angles.

In General, the Newtonian force function of the problem of three non-stationary bodies has the form [1-3].

$$U=U_{01}+U_{12}+U_{02} \tag{2.3}$$

where

$$U_{01}=f\int\limits_{(T_0)}\int\limits_{(T_1)}\frac{dm_0dm_1}{R_{01}},\ U_{12}=f\int\limits_{(T_1)}\int\limits_{(T_2)}\frac{dm_1dm_2}{R_{12}},\ U_{02}=f\int\limits_{(T_0)}\int\limits_{(T_2)}\frac{dm_0dm_2}{R_{02}} \tag{2.4}$$

$$R_{ij}=R_{ji}=\sqrt{(x_j-x_i)^2+(y_j-y_i)^2+(z_j-z_i)^2}\quad i,j=0,1,2,\quad i\neq j \tag{2.5}$$

there is a mutual distance between the centers of inertia $G_i$ and $G_j$ of the bodies $T_i$ and $T_j$, and $f$ is the gravitational constant.

$U_{ij}$ – the force function of the mutual attraction of two bodies $T_i$ and $T_j$ is defined as follows.

$$U_{ij} = U_{ij}^{(0)} + U_{ij}^{(2)} \tag{2.6}$$

Here

$$U_{ij}^{(0)} = f\frac{m_i m_j}{R_{ij}},\ U_{ij}^{(2)} = fm_i \frac{A_j + B_j + C_j - 3I_j^{(i,j)}}{2R_{ij}^{\ 3}} + fm_j \frac{A_i + B_i + C_i - 3I_i^{(i,j)}}{2R_{ij}^{\ 3}} \tag{2.7}$$

$$I_i^{(i,j)} = A_i\alpha_{ij}^2 + B_i\beta_{ij}^2 + C_i\gamma_{ij}^2 \qquad I_j^{(i,j)} = A_j\alpha_{ji}^2 + B_j\beta_{ji}^2 + C_j\gamma_{ji}^2 \tag{2.8}$$

$I_i^{(i,j)}$ and $I_j^{(i,j)}$ - moments of inertia of bodies $T_i$ and $T_j$ relatively straight $R_{ij}$ – connecting the centers of mass of two bodies $G_iG_j$, respectively. $i, j = 0,1,2, \quad i \neq j$.

### 2.2. Translational motion

We will not consider the equations of translational motion of body $T_0$, since the beginning of the relative coordinate system coincides with the barycenter of body $T_0$, so we will only consider its rotational motion.

The equations of translational motion of the body $T_1$ in the field of gravity of the "Central" body $T_0$ in the presence of disturbances from the body $T_2$, in the relative coordinate system is written as follows [1-3]

$$\ddot{x}_1 = \frac{1}{\mu_1(t)}\frac{\partial U_{10}}{\partial x_1} + \frac{\partial V_1^*}{\partial x_1} \quad \ddot{y}_1 = \frac{1}{\mu_1(t)}\frac{\partial U_{10}}{\partial y_1} + \frac{\partial V_1^*}{\partial y_1} \quad \ddot{z}_1 = \frac{1}{\mu_1(t)}\frac{\partial U_{10}}{\partial z_1} + \frac{\partial V_1^*}{\partial z_1} \tag{2.9}$$

where

$$\mu_1(t) = \frac{m_0 m_1}{m_0 + m_1} \text{ – reduced mass,} \tag{2.10}$$

$$V_1^* = \frac{1}{m_1}U_{12} + \frac{1}{m_0}\left[x_1\frac{\partial U_{20}}{\partial x_2} + y_1\frac{\partial U_{20}}{\partial y_2} + z_1\frac{\partial U_{20}}{\partial z_2}\right] \text{ – perturbance from body } T_2 \tag{2.11}$$

The equations of translational motion of the body $T_2$ in the field of gravity of the "Central" body $T_0$ in the presence of disturbances from the body $T_1$, in the relative coordinate system is written as follows [1-3]

$$\ddot{x}_2 = \frac{1}{\mu_2(t)}\frac{\partial U_{20}}{\partial x_2} + \frac{\partial V_2^*}{\partial x_2},\ \ddot{y}_2 = \frac{1}{\mu_2(t)}\frac{\partial U_{20}}{\partial y_2} + \frac{\partial V_2^*}{\partial y_2},\ \ddot{z}_2 = \frac{1}{\mu_2(t)}\frac{\partial U_{20}}{\partial z_2} + \frac{\partial V_2^*}{\partial z_2} \tag{2.12}$$

where

$$\mu_2(t) = \frac{m_0 m_2}{m_0 + m_2} \text{ – reduced mass,} \tag{2.13}$$

$$V_2^* = \frac{1}{m_2}U_{21} + \frac{1}{m_0}\left[x_2\frac{\partial U_{10}}{\partial x_1} + y_2\frac{\partial U_{10}}{\partial y_1} + z_2\frac{\partial U_{10}}{\partial z_1}\right] \text{ – perturbance from body } T_1 \tag{2.14}$$

For our purposes, it is preferable to use canonical equations of perturbed motion in the osculating analogues of the elements of Delaunay-Andoyer [1].

**3. Equations of motion in the osculating elements delaunay-andoyer**

The translational motion of the center of mass of axisymmetric bodies $T_1$ and $T_2$ is further described in the osculating elements. Rewrite the equations of translational motion of the body $T_1$ (2.9) as

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + f\frac{m_0+m_1}{R_{10}^{\ 3}}x_1 - b_1x_1 &= \frac{\partial V_1}{\partial x_1}, \\ \ddot{y}_1 + f\frac{m_0+m_1}{R_{10}^{\ 3}}y_1 - b_1y_1 &= \frac{\partial V_1}{\partial y_1}, \\ \ddot{z}_1 + f\frac{m_0+m_1}{R_{10}^{\ 3}}z_1 - b_1z_1 &= \frac{\partial V_1}{\partial z_1}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

where $V_1 = V_1^* + \frac{1}{\mu_1}U_{10}^{(2)} - \frac{1}{2}b_1R_{10}^2$ – force function of the perturbing force (3.2)

$$b_1 = b_1(t) = \frac{\ddot{\nu}_1}{\nu_1} = (m_0+m_1)\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{1}{m_0+m_1}\right),\ \nu_1 = \frac{m_0(t_0)+m_1(t_0)}{m_0(t)+m_1(t)} \tag{3.3}$$

We will write the equations of translational motion of the body $T_2$ in the following form

$$\begin{aligned} \ddot{x}_2 + f\frac{m_0+m_2}{R_{20}^{\ 3}}x_2 - b_2x_2 &= \frac{\partial V_2}{\partial x_2}, \\ \ddot{y}_2 + f\frac{m_0+m_2}{R_{20}^{\ 3}}y_2 - b_2y_2 &= \frac{\partial V_2}{\partial y_2}, \\ \ddot{z}_2 + f\frac{m_0+m_2}{R_{20}^{\ 3}}z_2 - b_2z_2 &= \frac{\partial V_2}{\partial z_2}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Where $V_2 = V_2^* + \frac{1}{\mu_2}U_{20}^{(2)} - \frac{1}{2}b_2R_{20}^2$ – force function of the perturbing force (3.5)

$$b_2 = b_2(t) = \frac{\ddot{\nu}_2}{\nu_2} = (m_0+m_2)\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{1}{m_0+m_2}\right),\ \nu_2 = \frac{m_0(t_0)+m_2(t_0)}{m_0(t)+m_2(t)} \tag{3.6}$$

And the equation of rotational motion remains unchanged

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(A_jp_j) - (A_j - C_j)q_jr_j &= \left[\frac{\partial U}{\partial \psi_j} - cos\theta_j\frac{\partial U}{\partial \varphi_j}\right]\frac{sin\varphi_j}{sin\theta_j} + cos\varphi_j\frac{\partial U}{\partial \theta_j}, \\ \frac{d}{dt}(A_jq_j) - (C_j - A_j)p_jr_j &= \left[\frac{\partial U}{\partial \psi_j} - cos\theta_j\frac{\partial U}{\partial \varphi_j}\right]\frac{cos\varphi_j}{sin\theta_j} - sin\varphi_j\frac{\partial U}{\partial \theta_j}, \\ \frac{d}{dt}(C_jr_j) &= \frac{\partial U}{\partial \varphi_j} = 0, \qquad j = 0,1,2 \end{aligned} \tag{3.7}$$

**3.1 Equations of translational-rotational motion in osculating analogues of the Delaunay-Andoyer elements.**

Consider the analogues of the Delaunay-Andoyer elements

$$L_i,\quad G_i,\quad H_i,\quad l_i,\quad g_i,\quad h_i \ \text{– Delaunay elements} \tag{3.8}$$

$$L_i',\quad G_i',\quad H_i',\quad l_i',\quad g_i',\quad h_i' \text{ – Andoyer elements} \tag{3.9}$$

The equations of motion in the osculating elements (3.8), (3.9) have the form

$$\dot{L}_i = \frac{\partial F_i}{\partial l_i},\quad \dot{G}_i = \frac{\partial F_i}{\partial g_i},\quad \dot{H}_i = \frac{\partial F_i}{\partial h_i},\quad \dot{l}_i = -\frac{\partial F_i}{\partial L_i},\quad \dot{g}_i = -\frac{\partial F_i}{\partial G_i},\quad \dot{h}_i = -\frac{\partial F_i}{\partial H_i} \tag{3.10}$$

$$F_i = \frac{1}{\nu_i^2}\frac{\mu_0^2}{2L_i^2} - H_{1i}^{trans} \quad (3.11)\quad H_{1i}^{trans} = -\left(\frac{m_0+m_i}{m_0 m_i}U^{(2)} - \frac{1}{2}b_i R_{0i}{}^2\right),\ i=1,2 \quad (3.12)$$

$$\dot{L}_j' = \frac{\partial F_j'}{\partial l_j'},\quad \dot{G}_j' = \frac{\partial F_j'}{\partial g_j'},\quad \dot{H}_j' = \frac{\partial F_j'}{\partial h_j'},\quad \dot{l}_j' = -\frac{\partial F_j'}{\partial L_j'},\quad \dot{g}_j' = -\frac{\partial F_j'}{\partial G_j'},\quad \dot{h}_j' = -\frac{\partial F_j'}{\partial H_j'} \tag{3.13}$$

$$F_j' = \frac{1}{2}\left(G_j'^2 - L_j'^2\right)\frac{1}{A_j} + \frac{L_j'^2}{2C_j} = \frac{1}{2}\frac{G_j'^2}{A_j} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{C_j} - \frac{1}{A_j}\right)L_j'^2 - H_{1j}^{rot} \tag{3.14}$$

$$H_{1j}^{rot} = -\left(U^{(2)} - \frac{1}{2}b_j R_{0j}{}^2\right),\ j = 0,1,2 \tag{3.15}$$

Note that the perturbing functions (3.12), (3.15) must be expressed in terms of the osculating elements (3.8), (3.9). These procedures are time-consuming and cumbersome analytical calculations. To do this, we use the system of symbolic calculations MATHEMATICA [10].

**3.2 Equations of unperturbed translational-rotational motion in osculating analogues of the Delaunay-Andoyer elements.**

**3.2.1 Unperturbed translational motion**.

If $H_{1i}^{trans} = 0,$ in the Hamiltonian (4.5) then

$$F_i = F_i^{unpert} = \frac{1}{\nu_i^2(t)}\cdot\frac{\mu_0^2}{2L_i^2}. \tag{3.16}$$

Equations of unperturbed translational motion of the center of inertia of bodies $T_1$ and $T_2$ in analogues of Delaunay elements (3.8) have the form

$$\dot{l}_i = -\frac{\partial F_i^{unpert}}{\partial L_i},\quad \dot{g}_i = 0,\quad \dot{h}_i = 0,\quad \dot{L}_i = 0,\quad \dot{G}_i = 0,\quad \dot{H}_i = 0,\quad i = 1,2 \tag{3.17}$$

Integrals of the system (3.17) can be written as follows

$$L_i = L_0 = const,\quad G_i = G_0 = const,\quad H_i = H_0 = const, \tag{3.18}$$

$$l_i = \frac{\mu_0^2}{L_i^3}\int_{t_0}^{t}\frac{dt}{\nu_i^2(t)} + l_0,\quad l_0 = const,\quad g_i = g_0 = const,\quad h_i = h_0 = const, \tag{3.19}$$

**3.2.2 Unperturbed rotational motion.**

If $H_{1j}^{rot} = 0$ in the Hamiltonian (3.15), then

$$F_j' = \frac{1}{2}\left(G_j'^2 - L_j'^2\right)\frac{1}{A_j} + \frac{L_j'^2}{2C_j} = \frac{1}{2}\frac{G_j'^2}{A_j} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{C_j} - \frac{1}{A_j}\right)L_j'^2 \tag{3.20}$$

Equation of unperturbed rotational motion in the analogues of Andoyer variables (3.9) has the form

$$\dot{L}'_j = 0, \quad \dot{G}'_j = 0, \quad \dot{H}'_j = 0, \quad \dot{l}'_j = -\frac{\partial F'_j}{\partial L'_j}, \quad \dot{g}'_j = -\frac{\partial F'_j}{\partial G'_j}, \quad \dot{h}'_j = 0, \tag{3.21}$$

From equation (3.9) it follows

$$L'_j = L'_0 = const, \quad G'_j = G'_0 = const, \quad H'_j = H'_0 = const, \tag{3.22}$$

$$l'_j = L'_0 \int_{t_0}^{t} \frac{A_j(t) - C_j(t)}{A_j(t) C_j(t)} dt + l'_0, \quad l'_0 = const, \quad g'_j = G'_0 \int \frac{dt}{A_j(t)} + g'_0, \quad g'_0 = const, \quad h'_j = h'_0 = const, \tag{3.23}$$

The geometric meaning of the analogues of Andoyer variables is given in [1, 4].

**4. Conclusion**

The article deals with the translational-rotational motion of non-stationary bodies that are interacting according to Newton's law. Based on the equation in the relative coordinate system with the beginning at the center of inertia of the most massive body, the equations of translational-rotational motion of three non-stationary axisymmetric bodies in the osculating analogues of the Delaunay-Andoyer elements are obtained. In the future, it is planned to Express the perturbing function through the osculating Delaunay-Andoyer variables and numerical analysis of the obtained equations.

**М.Дж. Минглибаев, А.Қ. Кушекбай**

әл-Фараби атындағы ҚазҰУ, Алматы, Қазақстан

**ӨСТІК СИММЕТРИЯЛЫ ҮШ ДЕНЕНІҢ ДИНАМИКАСЫНА**

**Аннотация.** Классикалық аспан механикасында табиғи аспан денелері нүкте ретінде қарастырылады (сфералық симметриялы дене). Егер мұндай модель физикалық құбылыстың қасиеттерін нақты сипаттап бере алмаған жағдайда табиғи аспан денелерін өлшемдері мен массалары тұрақты және құрылымы өзгермейтін қатты дене ретінде модельдейді. Аспан денелерінің нүкте (шар) де емес, қатты дене де емес екеніне бүгінде бақылаушы астрономия куәлік етеді. Табиғи аспан денелері негізінен бейстационар. Уақыт өте олардың массалары, өлшемдері және массаның таралу құрылымдары өзгереді. Сәйкесінше, олардың гравитациялық тартылыс күші және өзара Ньютондық әсерлесу күші уақытқа тәуелді болады. Бұл факторлар дененің динамикалық эволюциясына айтарлықтай әсер етеді. Ең көп тараған бейстационарлық-гравитациялық денелер массаларының және өлшемдерінің өзгермелілігі. Жоғарыда сипатталған физикалық жүйелердің ілгерілемелі-айналмалы қозғалысын зерттеу қазіргі заманғы теориялық және аспан механикасының маңызды есебі болып табылады. Мысалға, айнымалы жұлдыздардың радиусының периодты өзгеруі осыған дәлел. Әр түрлі жұлдыздардың өсу этапында олардың қысылуы мен кеңеюі жұлдыздың ішкі эволюция теориясынан шығады. Мысалы, жұлдыздың өлшемі қызыл гигант стадиясына өткен кезде, массасына тәуелді 10-нан 100-ге дейін өзгереді. Әсіресе диссипация процессінің интенсиві және массаның ауысуы тығыз екі жүйеде болады. Жұлдыздардың шоғырлануы, газдық фондағы эволюциялануы пульсация жағдайында болады. Соған қатысты олардың тартылыс байланыстары айнымалы болады, Ньютондық өзара потенциалды байланысы тікелей уақыттан тәуелді болады. Осы факторлар олардың динамикалық эволюциясына әсер етеді. Жұлдыздардың эволюциясын сипаттау үшін массаның және радиусының өзгеруіне жұлдыздың реакциясын беретін, сипаттама функциясы енгізіледі. Жұлдыздың массасы өзгерген кездегі, оның өлшемінің өзгеруі зерттеледі. Масса, өлшем және пішіннің өзгеруі физикалық айнымалы жұлдыздар – пульсацияланатын жұлдыздарда айқын көрінеді.

Классикалық үш дене мәселесі - аспан механикасының өте қызықты, күрделі және өзекті мәселесі, ғалымдар бұл мәселенің жалпы шешімін әлі күнге дейін таба алмай келеді. Егер осы мәселеде біз денелердің массалары айнымалы екенін ескеретін болсақ, бұл есепті қиындатады. Осыған байланысты айнымалы массалы үш дене мәселесінің жалпы және дербес бірде-бір нақты шешімі жоқ.

Гравитациялаушы дененің массасы мен өлшемінің өзгеру салдары бейстационар нақты ғарыштық жүйе динамикалық эволюциясының негізгі факторларының бірі болып табылады. Осы жұмыста массасы, өлшемі және пішіні айнымалы үш дене мәселесінің айнымалы-ілгерлемелі қозғалысы қарастырылған. Бұл жұмыстың

негізгі мақсаты біздің алдыңғы жұмысымызда алған қозғалыс теңдеулерінің негізінде үш өстік симметриялы, массалары мен өлшемедері айнымалы, айнымалы сығылатын денелердің ілгерілемелі-айналмалы қозғалысының дифференциалдық теңдеулерін оскуляциялаушы элементтерде алу.

Мақалада өзара гравитацияланушы бейстационар үш дене қарастырылады: бірінші дене – «центрлік», яғни басқа екі денеге қарағанда үлкенірек. Үш дененің де динамикалық құрылымы және пішіні өстік симметриялы. Ньютонның өзара әсерлесу күші екінші гармониканы ескергендегі күштік функцияның жуық өрнегімен сипатталған. Массасы және өлшемі айнымалы өстік симметриялы денелердің ілгерілемелі-айналмалы қозғалысының дифференциалдық теңдеулері салыстырмалы координаталар жүйесінде өткен жұмысымызда қорытылып шығарылған болатын. Бейстационар үш дене үшін меншікті координаталар жүйесінің өстері дененің бас инерция өстерімен сәйкес келеді және бұл күй эволюция барысында өзгеріссіз қалады. Денелердің массалары әртүрлі қарқында изотропты өзгереді. Есепте ұйытқу теориясының тәсілдері пайдаланылған. Оскуляциялаушы Делоне-Андуайе элементтерінің аналогтарында серіктің ілгерілемелі-айналмалы қозғалысының теңдеулері алынды. Ұйытқымаған қозғалыстың конондық теңдеулерінің интегралдары келтірілді.

**Түйін сөздер**: өстік симметриялы дене, ілгерілемелі-айналмалы қозғалыс, айнымалы масса, үш дене есебі, оскуляциялаушы элементтер.

**М.Дж. Минглибаев, А.Қ. Кушекбай**

КазНУ им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан

## К ДИНАМИКЕ ТРЕХ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ТЕЛ

**Аннотация.** В классической небесной механике реальные небесные тела моделируются материальной точкой (сферически симметричного тела). В случаях, когда такое описание физических явлений неадекватно отражает суть реальной небесно-механической проблемы, небесные тела моделируются твердым телом постоянного размера, массы и неизменной структурой. Наблюдательная астрономия свидетельствует, что реальные небесные тела неточечные и нетвердые. Реальные космические тела по существу нестационарные. Со временем меняются их массы, размеры, формы и структура распределения массы внутри тел. Соответственно, становится переменной их гравитирующая связь и ньютоновский потенциал взаимодействия оказывается явно зависящим от времени. Эти факторы существенно влияют на динамическую эволюцию тел. На некоторых этапах эволюции гравитирующих систем эффекты нестационарности тел, входящих в систему в конце этого этапа. Наиболее часто распространенная нестационарность – переменность масс гравитирующих тел. Исследование поступательно-вращательного движения выше описанных физических систем является актуальной задачей современной теоретической и небесной механики. В связи с этим становится актуальным создание математических моделей движения небесных тел с переменными массами, размерами, и формами. Целью настоящей работы является на основе уравнения движения, полученные в предыдущей нашей работе вывести дифференциальные уравнения поступательно-вращательного движения нестационарных трех осесимметричных тел с переменными массами, размерами и переменного сжатия в оскулирующих элементах.

Исследуется поступательно-вращательное движение трех свободных нестационарных осесимметричных небесных тел с переменными массами, размерами и переменного сжатия взаимодействующих по закону Ньютона, из которых никакие два не имеют общие части. Ньютоновская сила взаимодействия характеризуется приближенным выражением силовой функции, учитывающая вторую гармонику. Пусть эллипсоид инерции тел $T_0, T_1, T_2$ различные, осесимметричные и имеют собственную экваториальную плоскость симметрии и в ходе эволюции эти свойства сохраняются. Так же допустим, что сжатия тел относительно экваториальной плоскости переменные. Исходные расположения главных осей инерции и центр инерции в теле осесимметричных тел в ходе эволюции остаются неизменными и направлены вдоль линии пересечения трех взаимоперпендикулярных плоскостей.

Приведены дифференциальные уравнения поступательно-вращательного движения трех нестационарных осесимметричных тел с переменными массами и размерами в относительной системе координат, с началом в центре более массивного тела. Оси инерции собственной системы координат нестационарных осесимметричных трех тел совпадают с главными осями инерции тел и предполагается, что в ходе эволюции их относительная ориентация остаются неизменными. Массы тел изменяются изотропно в различных темпах. Получены канонические уравнения поступательно-вращательного движения трех нестационарных осесимметричных тел с переменными массами и размерами в аналогах оскулирующих элементов Делоне-Андуайе. Приведены канонические уравнения невозмущенного движения, и их интегралы.

**Ключевые слова:** поступательно-вращательное движение, переменная масса, задача трех тел, осесимметричные небесные тела, оскулирующие элементы.

**Information about authors**

Minglibayev Mukhtar Zhumabekovich – al-Farabi Kazakh National University, Fesenkov Astrophysical Institute, Chief Researcher, e-mail: minglibayev@gmail.com, https://orcid.org/0000-0002-8724-2648;

Kushekbay Abylay Kabidullauly – PhD student, al-Farabi Kazakh National University, e-mail: kkabylay@gmail.com, https://orcid.org/0000-0002-1674-3648

**REFERENCES**

[1] Minglibayev M.Zh. (2012) Dinamika gravitiruyushchikh tel s peremennymi massami i razmerami. *LAP LAMBERT Academic Publishing.* 224p. ISBN: 978-3-659-29945-2

[2] Duboshin G.N. (1975) Nebesnaia mekhanika. Osnovnye zadachi i metody. *Moskva: Nauka*, 799 p.

[3] Minglibaнev M.Zh., Kushekbay A.K. (2019) Uravneniia postupatel'no-vrashchatel'nogo dvizheniia zadachi trekh

[4] osesimmetrichnykh tel s peremennymi massami, razmerami i formami. *BULLETIN of L.N. Gumilyov Eurasian National University, MATHEMATICS. COMPUTER SCIENCE. MECHANICS Series*, Vol.2 (127), P. 58-65. https://doi.org/10.32523/2616-7182/2019-127-58-65

[5] Borisov A.V., Mamaev I.S. (2005) Dinamika tverdogo tela. Gamil'tonovy metody, integriruemost', khaos. *Moskva-Izhevsk,*

[6] *Institut komp'iuternykh issledovanii*, 576 p.

[7] Martynova A.I., Orlov V.V., Rubinov A.V., Sokolov L.L., Nikifirov I.I. (2010) Dinamika troinykh sistem. *izd. S.*

[8] *Peterburgskogo universiteta*, 214p.

[9] Omarov T.B. (2002) (Editor) Non-Stationary Dynamical Problems in Astronomy. *New-York: Nova Science Publ.Inc.* 260p.

[10] Bekov A.A., Omarov T.B. (2003) The theory of orbits in non-stationary stellar systems, *Astron. Astrophys. Trans.* Vol. 22(2). P.145-153.

[11] Luk'janov L.G. (1983) Ob uravnenijah dvizhenija zadachi mnogih tel s peremennymi massami. *Astron. zhurn.* – Vol.60(1). P. 181-184.

[12] Prokopenya A.N. (2005) Reshenie fizicheskih zadach c ispolzovaniem sistemy Mathematica, BSTU Publishing, Brest, 260 p.

[13] S.B. Bizhanova, A.N. Prokopenia, M.Zh. Minglibayev. (2020) Issledovanie vekovykh vozmushchenii postupatel'no

[14] vrashchatel'nogo dvizheniia v nestatsionarnoi zadache dvukh tel s primeneniem komp'iuternoi algebry. *Zhurnal vychislitel'noi matematiki i matematicheskoi fiziki,* Vol 60(1), P. 27-36. https://doi.org/10.1134/S0044466920010068

[15] M.Zh. Minglibayev, A.T. Ibraimova (2019) Equations of motion of the restricted three-body problem with

[16] non-isotropically variable masses with reactive forces. *Izvestiia natsional'noi akademii nauk Respubliki Kazakhstan. Seriia fiziko-matematicheskaia.* Vol.325(3). P.5-12. https://doi.org/10.32014/2019.2518-1726.18