ISSN 2518-1483 (Online),
ISSN 2224-5227 (Print)

2023 • 2

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ
ҰЛТТЫҚ ҒЫЛЫМ АКАДЕМИЯСЫНЫҢ

БАЯНДАМАЛАРЫ

ДОКЛАДЫ
НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК
РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН

REPORTS
OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES
OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

PUBLISHED SINCE JANUARY 1944

ALMATY, NAS RK

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ ҰЛТТЫҚ ҒЫЛЫМ АКАДЕМИЯСЫНЫҢ

БАЯНДАМАЛАРЫ 2023 • 2

«Қазақстан Республикасы Ұлттық ғылым академиясының баяндамалары»

ISSN 2518-1483 (Online), ISSN 2224-5227 (Print)

Меншіктеуші: «Қазақстан Республикасының Ұлттық ғылым академиясы» Республикалық қоғамдық бірлестігі (Алматы қ.). Қазақстан Республикасының Ақпарат және қоғамдық даму министрлігінің Ақпарат комитетінде 29.07.2020 ж. берілген **№ KZ93VPY00025418** мерзімдік басылым тіркеуіне қойылу туралы куәлік.

Тақырыптық бағыты: *өсімдік шаруашылығы, экология және медицина саласындағы биотехнология және физика ғылымдары.*

Мерзімділігі: жылына 4 рет. Тиражы: 300 дана.

Редакцияның мекен-жайы: 050010, Алматы қ., Шевченко көш., 28; 219 бөл.; тел.: 272-13-19 http://reports-science.kz/index.php/en/archive

Типографияның мекен-жайы: «Аруна» ЖК, Алматы қ., Муратбаева көш., 75.

ДОКЛАДЫ 2023 • 2

НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН

Доклады Национальной академии наук Республики Казахстан»

ISSN 2518-1483 (Online), ISSN 2224-5227 (Print)

Собственник: Республиканское общественное объединение «Национальная академия наук Республики Казахстан» (г. Алматы). Свидетельство о постановке на учет периодического печатного издания в Комитете информации Министерства информации и общественного развития Республики Казахстан **№ KZ93VPY00025418,** выданное 29.07.2020 г.

Тематическая направленность: *биотехнология в области растениеводства, экологии, медицины и физические науки.*

Периодичность: 4 раз в год. Тираж: 300 экземпляров

Адрес редакции: 050010, г. Алматы, ул. Шевченко, 28; ком. 219; тел. 272-13-19 http://reports-science.kz/index.php/en/archive

Адрес типографии: ИП «Аруна», г. Алматы, ул. Муратбаева, 75.

REPORTS 2023 • 2

OF NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

Reports of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan.

ISSN 2518-1483 (Online), ISSN 2224-5227 (Print)

Owner: RPA «National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan» (Almaty). The certificate of registration of a periodical printed publication in the Committee of information of the Ministry of Information and Social Development of the Republic of Kazakhstan **No. KZ93VPY00025418,** issued 29.07.2020.

Thematic scope: *biotechnology in the field of crop research, ecology and medicine and physical sciences.*

Periodicity: 4 times a year. Circulation: 300 copies.

Editorial address: 28, Shevchenko str., of. 219, Almaty, 050010, tel. 272-13-19 http://reports-science.kz/index.php/en/archive

---

Address of printing house: ST «Aruna», 75, Muratbayev str., Almaty.

REPORTS OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
ISSN 2224-5227
Volume 2. Number 346 (2023), 42-57
https://doi.org/10.32014/2023.2518-1483.209
UDC 517.624.2

© Z. Utemaganbetov[1], G. Nigmetova[1], B. Urbisinova[1], K. Astemessova[2*], G. Turlybekova[2], 2023

[1]Caspian University of Technology and Engineering named after Sh.Yessenov, Aktau, Kazakhstan;
[2]Kazakh National Technical University named K.I. Satbayev, Almaty, Kazakhstan.
E-mail: k.astemessova@satbayev.university

ALTERNATIVE AND EXTENDED VERSION OF RUN METHOD (THOMAS ALGORITHM) OF NUMERICAL SOLUTION OF 1-OY EDGE PROBLEM FOR LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS OF SECOND ORDER

Utemaganbetov Zinepkali — Candidate of Physics and Mathematics Science, professor. Caspian University of Technology and Engineering named after Sh.Yessenov, 130000, Aktau, Kazakhstan
E-mail: zinepkali.utemaganbetov@yu.edu.kz. ORCID: 0000-0003-4656-8964;
Nigmetova Gulmira — Candidate of Physics and Mathematics Science, professor. Caspian University of Technology and Engineering named after Sh.Yessenov, 130000, Aktau, Kazakhstan
Urbisinova Batihan — Assistant Professor (Senior Lecturer). Caspian University of Technology and Engineering named after Sh.Yessenov, 130000, Aktau, Kazakhstan
E-mail: batikhan.urbissinova@yu.edu.kz. ORCID: 0000-0002-0868-0536;
Astemessova Kalamkas — PhD, Senior Lecturer. Kazakh National Technical University named K.I. Satbayev, 050043, Almaty, Kazakhstan
E-mail: k.astemessova@satbayev.university. ORCID: 0000-0002-4143-6084;
Turlybekova Gulzhan — Candidate of technical sciences, Senior Lecturer. Kazakh National Technical University named K.I. Satbayev, 050043, Almaty, Kazakhstan
E-mail: g.turlybekova@satbayev.university. ORCID: 0000-0001-5522-4931.

Abstract. A new algorithm is proposed, which is an alternative to the run method for numerical solution of linear differential equations of the second order with fixed boundary conditions. The purpose of this work is to obtain recurrent formulas similar to the run-through formulas for the numerical solution of the boundary value problem of second-order differential equations. The above method has the first order of accuracy and is absolutely stable, that is, its stability does not depend on the magnitude of the step. The paper shows the consistency and computational stability of the difference schemes represented by the proposed recurrent formulas. The results of this article are confirmed by computation data.

Key words: differential equations, sweep method, numerical solution, boundary value problems, computational error, classical sweep method, Gauss method, recurrent formula, boundary conditions, simple factorization method

© З.С. Утемаганбетов[1], Г.Н. Нигметова[1], Б.Т. Урбисинова[1], К.С. Астемесова[2*], Г.К. Турлыбекова[2], 2023

[1]Ш. Есенов атындағы Каспий технологиялар және инжиниринг университеті, Ақтау, Қазақстан;

[2]Қ.И. Сәтбаев атындағы Қазақ ұлттық техникалық зерттеу университеті , Алматы, Қазақстан.

E-mail: k.astemessova@satbayev.university

ЕКІНШІ РЕТТІ СЫЗЫҚТЫҚ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР ҮШІН 1- ШЕКАРАЛЫҚ ЕСЕПТІ САНДЫҚ ШЕШУДІҢ ҚУАЛАУ ӘДІСІНІҢ (ТОМАС АЛГОРИТМІ) БАЛАМА ЖӘНЕ КЕҢЕЙТІЛГЕН НҰСҚАСЫ

Утемаганбетов Зинепкали Сисенгалиевич — физико-математика ғылымдарының кандидаты, доцент. Ш. Есенов атындағы Каспий технологиялар және инжиниринг университеті, 130000, Актау, Казахстан

E-mail: zinepkali.utemaganbetov@yu.edu.kz. ORCID: 0000-0003-4656-8964;

Нигметова Гулмира Нагимовна — Ш. Есенов атындағы Каспий технологиялар және инжиниринг университеті, 130000, Актау, Казахстан

E-mail: gulmira.nigmetova@yu.edu.kz. ORCID: 0000-0001-6362-6439;

Урбисинова Батихан Туленжановна — профессор ассистенті (аға оқытушы), жаратылыстану ғылымдарының магистрі. Ш. Есенов атындағы Каспий технологиялар және инжиниринг университеті, 130000, Актау, Казахстан

E-mail: batikhan.urbissinova@yu.edu.kz. ORCID: 0000-0002-0868-0536;

Астемесова Каламкас Сериковна — PhD, аға оқытушы. Қ.И. Сәтбаев атындағы Қазақ ұлттық техникалық зерттеу университеті , 050043, Алматы, Қазақстан

E-mail: k.astemessova@satbayev.university. ORCID: 0000-0002-4143-6084;

Турлыбекова Гулжан Капсаовна — техника ғылымдарының кандидаты, аға оқытушы. Қ.И. Сәтбаев атындағы Қазақ ұлттық техникалық зерттеу университеті , 050043, Алматы, Қазақстан

E-mail: g.turlybekova@satbayev.university. ORCID: 0000-0001-5522-4931.

Аннотация. Бекітілген шекті шартты екінші ретті сызықтық дифференциалдық теңдеулерді сандық шешу үшін қуалау әдісіне балама болып табылатын жаңа алгоритм ұсынылды. Алгоритм белгілі қуалау әдісіне қарағанда қолдану аймағы кең және теңдеу коэффициентінің оң және теріс мәнді болуына тәуелсіз**.** Бұл жұмыстың мақсаты екінші ретті дифференциалдық теңдеулердің шекаралық есебін сандық шешу үшін қуалау формулаларына ұқсас рекуренттік формулаларды алу болып табылады.

Жоғарыда келтірілген әдіс дәлдіктің бірінші ретіне ие және мүлдем тұрақты, яғни оның тұрақтылығы h қадамның мөлшеріне байланысты емес. Жұмыста ұсынылған рекуренттік формулалар арқылы берілген айырымдық сұлбаларының үйлесімділігі мен есептеу тұрақтылығы көрсетілген. Мақаладағы алынған нәтижелер есептік деректермен расталады.

Түйінді сөздер: дифференциалдық теңдеулер,қуалау әдісі, сандық шешім, шекаралық есептері, есептеу қателігі, классикалық қуалау әдісі, Гаусс әдісі, рекуренттік формула, шекаралық шарттары, қарапайым факторизация әдісі

© З.С. Утемаганбетов[1], Г.Н. Нигметова[1], Б.Т. Урбисинова[1], К.С. Астемесова[2], Г.К. Турлыбекова[2], 2023

[1]Каспийский университет технологий и инжиниринга имени Ш. Есенова, Актау, Казахстан;

[2] Казахский национальный исследовательский технический университет им. К.И. Сатпаева, Алматы, Казахстан.

АЛЬТЕРНАТИВНЫЙ И РАСШИРЕННЫЙ ВАРИАНТ МЕТОДА ПРОГОНКИ (АЛГОРИТМ ТОМАСА) ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ 1-ОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Утемаганбетов Зинепкали Сисенгалиевич — кандидат физико-математических наук, доцент. Каспийский университет технологий и инжиниринга имени Ш. Есенова, 130000, Актау, Казахстан
E-mail: zinepkali.utemaganbetov@yu.edu.kz. ORCID: 0000-0003-4656-8964;
Нигметова Гулмира Нагимовна — кандидат физико-математических наук, доцент. Каспийский университет технологий и инжиниринга имени Ш. Есенова, 130000, Актау, Казахстан
E-mail: gulmira.nigmetova@yu.edu.kz. ORCID: 0000-0001-6362-6439;
Урбисинова Батихан Туленжановна — ассистент профессор (старший преподователь), магистр естественных наук. Каспийский университет технологий и инжиниринга имени Ш. Есенова, 130000, Актау, Казахстан
E-mail: batikhan.urbissinova@yu.edu.kz. ORCID: 0000-0002-0868-0536;
Астемесова Қаламкас Сериковна — PhD, старший преподаватель. Казахский национальный исследовательский технический университет им. К.И. Сатпаева, 050043, Алматы, Казахстан
E-mail: k.astemessova@satbayev.university. ORCID: 0000-0002-4143-6084;
Турлыбекова Гулжан Капасовна — кандидат технических наук, старший преподаватель. Казахский национальный исследовательский технический университет им. К.И. Сатпаева, 050043, Алматы, Казахстан
E-mail: g.turlybekova@satbayev.university. ORCID: 0000-0001-5522-4931.

Аннотация. Предложен новый алгоритм, который является альтернативой методу прогонки для численного решения линейных дифференциальных уравнений второго порядка с закрепленными краевыми условиями. Алгоритм имеет более широкую область применимости, чем известный метод прогонки и работает как при положительных, так и при отрицательных коэффициентах уравнения. Целью настоящей работы является получение рекуррентных формул аналогичных формулам прогонки, для численного решения краевой задачи дифференциальных уравнений второго порядка. Приведенной метод имеет первый порядок точности и является абсолютно устойчивым, то есть его устойчивость не зависит от величины шага h. В работе показаны согласованность и вычислительная устойчивость разностных схем представляемых посредством предлагаемых рекуррентных формул. Результаты, полученные в данной статье, подтверждаются расчетными данными.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, метод прогонки, численное решение, краевые задачи, вычислительная погрешность, метод классической прогонки, метод Гаусса, рекуррентная формула, граничные условия, метод простой факторизации

Введение

Применения широко распространенных конечно-разностных, проекционно-сеточных и многих других методов для численного решения краевых задач для дифференциальных уравнений, в конечном этапе решения приводит к применению метода прогонки. Поэтому метод прогонки занимает важное место среди наиболее часто применяемых численных методов.

Метод прогонки, предназначен для решения разностных уравнений, которые получаются при написании разностных соотношений для дифференциальных уравнений. Вычислительная устойчивость метода прогонки гарантируется при условии, когда имеет место свойство диагонального преобладания матрицы системы разностных уравнений. В свою очередь, для соответствующих дифференциальных уравнений это свойство означает, что коэффициент при искомом решении должен быть положительным. Методы прогонки при условии, когда вышеуказанное свойство устойчивости выполнено хорошо зарекомендовали себя как широко применяемое средство численного решения краевых задач дифференциальных уравнений второго порядка. К данному моменту существуют различие в оценках условий устойчивости метода прогонки (вплоть до решительной критики, (Бабенко, 2002) но, тем не менее, этот класс методов в целом положительно принят и является одним из основных инструментов специалистов-вычислителей, о чем свидетельствует описание этих методов в учебниках. Несомненно, решающую роль сыграла более чем, 50-летняя практика применения методов прогонки к решению конкретных задач. К сожалению, строгого обоснования применимости методов этого класса желает оставлять лучшего, так как в совокупности строгих результатов имеются существенный пробел. Например, в работе (Бахвалов, 1973) приводится подробный анализ формул прогонки и излагается о трудностях при замыкании вычислительного алгоритма, как следствие того, что формулы прямой прогонки в начальной точке ведут себя как обратная величина к шагу сетки.

Примеры, когда метод прогонки дает неудовлетворительные результаты при решении краевых задач, имеются множество в разных источниках. В частности, таких примеров можно найти в (Амосов, 1994; Ильин, 1985). Причем неудовлетворительный результат может получиться и в том случае, когда все условия применимости метода прогонки выполнены.

Такая неблагоприятная ситуация может быть следствием накопления вычислительных погрешностей. При расчетах с достаточно крупными шагами h, влиянием вычислительной погрешности на решение часто можно пренебречь. Однако все же стоит иметь в виду, что при решении системы разностных уравнений соответствующей краевой задаче методом прогонки может происходить накопление вычислительной погрешности. Известно, что при $h \to 0$, вычислительная погрешность может возрастать пропорционально $1/h^2$.

1. Таким образом, при достаточно малых значениях шага h возможна катастрофическая потеря точности. Такая недопустимая потеря точности происходит из-за того, что уже на этапе составления разностных уравнений происходит существенное искажение искомого решения (Бахвалов, 1973). То есть, такая ситуация является следствием недостатка метода конечных разностей, а не следствием метода прогонки, что полностью соответствует изложенному в книге Бабенко К.И. (Бабенко, 2002).

Метод классической прогонки предназначен для решения конечно-разностных уравнений, матрицы которых имеет трехдиагональный вид. Но, если для таких матриц не выполнены условия диагонального преобладания, то обоснование вычислительной устойчивости метода прогонки не представляется возможным. Следовательно, применение классической прогонки для решения таких систем не совсем правомерно. Поэтому для таких случаев напрашивается применения метода «немонотонной прогонки», который является методом Гаусса с выбором главного элемента. Однако при попытке применить «немонотонную прогонку» может быть нарушен трёхдиагональность исходной матрицы, поэтому «немонотонную прогонку» не применяет для ленточных матриц (Калиткин, 2013). Анализ устойчивости счета при выборе ведущего элемента и возможность недопустимого роста некоторых коэффициентов необходимых для счета приведен в работе (Ильин, 1985).

На основе вышеприведенных обстоятельств можно прийти к выводу, что следовало бы, иметь в арсенале вычислительной математики серию рекуррентных формул, аналогичных формулам прогонки но, тем не менее, которая представляла бы собой некую альтернативу к формулам классической прогонки. При этом желательно, чтобы предлагаемые формулы были вычислительно устойчивыми для широкого класса задач, чем это имеет место для известных вариантов методов прогонки.

Цель настоящей работы — получение рекуррентных формул аналогичных формулам прогонки, для численного решения краевой задачи дифференциальных уравнений второго порядка, когда метод прогонки может привести к неутешительным результатам.

В частности, особенно важным является вопрос о наличии прогоночных формул, когда коэффициент при решении в уравнении (имеет отрицательный знак или является знакопеременным) и граничные условия не удовлетворяет условиям устойчивости широко применяемого метода прогонки.

Постановка задачи. Рассматривается дифференциальное уравнение второго порядка

$$y''(t) - q(t)y(t) = f(t), \quad 0 \le t \le 1 \qquad (1)$$

со следующими краевыми условиями

$$y(0) = \beta_0 \qquad (2)$$

$$y(1) = \beta_1 \qquad (3)$$

где $\beta_0, \beta_1 \in \Re = \left]-\infty, +\infty\right[$. Будем считать, что коэффициенты уравнения $f(t), q(t)$ – непрерывны на отрезке $[0, \quad 1]$.

Для исследования вопросов численного решения данной краевой задачи разобьем отрезок $[0,1]$ на N частей, введением узловых точек $0 = \mathrm{t}_0 < t_1 < \ldots < t_N = 1$.

Если обозначить через h расстояния между узлами (шаг сетки), то $h = \dfrac{1}{N}, t_n = \dfrac{n}{N}, (n = 0, 2, \ldots N)$ где N - целое число отрезков разбиения (шаг сетки может быть и неравномерным). В дальнейшем будем обозначать через $y(t_n)$ значение точного решение краевой задачи (1) - (3) в точке t_n, а через y_n и y'_n соответствующее приближенное решение и ее производную, построенное с помощью рассматриваемого численного метода. Также для удобства будем пользоваться обозначениями вида

$$\mu_n = \int\limits_{t_{n-1}}^{t_n} q(t)dt, \quad \sigma_n = \int\limits_{t_{n-1}}^{t_n} f(t)dt, \qquad \theta_n = \int\limits_{t_{n-1}}^{t_n} \int\limits_{t_{n-1}}^{t} q(x)dxdt,$$

$$\mu_n = \int\limits_{t_{n-1}}^{t_n} q(t)(t-t_{n-1})dt, \quad \sigma'_n = \int\limits_{t_{n-1}}^{t_n} f(t)(t-t_{n-1})dxdt, \; n = 1, 2, , \ldots N$$

Необходимо получить рекуррентные прогоночные формулы численного решения краевой задачи (1)-(3) и исследовать их на предмет согласованности и устойчивости, и тем самым указать условия применимости полученных формул.

Рекуррентные формулы для численного решения краевой задачи (1)–(3), в случае когда $q(t) \geq 0$. Как известно, что в этом случае существует и единственно решение краевой задачи (1)-(3).

Описание алгоритма

В случае когда $q(t) \geq 0$, для численного решения краевой задачи (1) – (3) могут быть использованы следующие рекуррентные формулы:

Формулы прямого хода:

$$a_0 = 0\,, \qquad a_n = \frac{a_{n-1}(1+\eta_n)+h}{1+a_{n-1}\mu_n+\eta_n}\,, \tag{4}$$

$$v_0 = \beta_0\,,$$

$$v_n = \frac{v_{n-1}-a_{n-1}\sigma_n-\sigma'_n}{1+a_{n-1}\mu_n+\eta_n}\,, \tag{5}$$

для всех $n = 1\,,2,\ldots N$.

Формула обратного хода:

$$y_N = \beta_1\,, \qquad y_{n-1} = \frac{(1+\eta_n)y_n + v_n\dfrac{h}{a_n}\left(1+\dfrac{h}{a_n}\right)+\sigma'_n}{(a_n+h)a_n+h^2}a_n^2$$

(6)

для всех $n = N\,, N-1, \ldots 2$.

Доказательство согласованности. Для этого покажем, что при $h \to 0$, из приведенных рекуррентных формул (4) - (6) можно получить задачу Коши для трех дифференциальных уравнений первого порядка, которая в свою очередь, является эквивалентной исходной краевой задаче (1) – (3).

Из формулы (4), после отбрасывания слагаемых порядка $O(h^2)$, имеем $a_n + a_n a_{n-1}\mu_n = a_{n-1} + h$ или $a_n - a_{n-1} = h - a_n a_{n-1}\mu_n$. Деля обе части этого выражение на h и переходя к пределу при $h \to 0$, можно получить дифференциальное уравнение который носит название Рикатти

$$a'(t) + q(t)a^2(t) = 1, \text{ с начальным значением } a(0) = 0 \qquad (7)$$

Рассуждая совершенно аналогично, можем убедиться в том, что дифференциальными аналогами соответствующим рекуррентным формулам (5) - (6) являются следующие дифференциальные уравнения

$$v'(t) + q(t)a(t)v(t) = -a(t)f(t) \qquad v(0) = \beta_0, \qquad (8)$$

$$y(t) - a(t)y'(t) = v(t) \qquad y(1) = \beta_1. \qquad (9)$$

где последнее уравнение системы интегрируется справа налево. Эквивалентность исходной краевой задачи (1)-(3) и задачи (7)-(9) проверяется (продифференцируем последнее уравнение и воспользуемся предыдущими двумя уравнениями) непосредственной подстановкой.

Доказательство устойчивости. Теперь убедимся, в том, что вышеприведенные рекуррентные формулы являются вычислительно устойчивыми. Заметим, что по условию $\mu_n = \int_{t_{n-1}}^{t_n} q(t)dt \ge 0, \quad a_0 = 0$, $\eta_n = \int_{t_{n-1}}^{t_n} q(t)(t - t_{n-1})dt \ge 0,$ отсюда, как видно из формулы (4) следует, все что $a_n \ge 0$, значит, выполняется неравенство $\frac{1}{1 + a_{n-1}\mu_n + \eta_n} \le 1$, для всех $n = 1,2,\ldots N$. Это обстоятельство обеспечивает устойчивость счета по формулам (4) – (5).

В формуле (6) множитель, непосредственно влияющий на устойчивость, (стоящий перед y_n), имеет вид: $\frac{1 + \eta_n}{1 + \frac{h}{a_n} + \left(\frac{h}{a_n}\right)^2}$.

Здесь в числителе второе слагаемое η_n имеет порядок $O(h^2)$ и тем самым не оказывает существенного влияние на устойчивость счета по этой формуле, и поэтому можно только рассмотреть выражение: $\dfrac{1}{1+\dfrac{h}{a_n}+\left(\dfrac{h}{a_n}\right)^2}$.

Поскольку, по условию $a_n \geq 0$, то выполняется неравенство $\dfrac{1}{1+\dfrac{h}{a_n}+\left(\dfrac{h}{a_n}\right)^2} \leq 1$ для всех $n = N, N-1, \ldots 1.$, что гарантирует устойчивость счета по формуле обратного хода (6). Заметим, что приведенные рекуррентные формулы (4) - (6) аппроксимирует исходную краевую задачу с вторым порядком точности. При необходимости, могут быть выписаны аналогичные к (4)-(6) рекуррентные формулы, которые обеспечивают более высокую точность, чем приведенные, но целью этого пункта данной работы является обоснования корректности этих формул, которые являются основой при построении алгоритма для численного решения задачи (1)-(3), в случае когда $q(t) \leq 0$.

Сведение краевой задачи (1) - (3) к дифференциальной задаче Коши (7) – (9) и последующее ее решение называется методом дифференциальной прогонки или методом простой факторизации и в том случае когда, в уравнении (1) $q(t) \geq 0$, был предметом исследования многих авторов. Среди них Гельфанд, Локуциевский, Марчук, Ридли и т.д. К развитию метода прогонки применительно к задачам разного характера внесли весомые вклады многие видные математики. Среди них: Абрамов А.А., Бахвалов Н.С., Владимиров В.С., Воеводин А.Ф., Годунов С.К., Отелбаев М.О., Дегтярев Л.М., Сафронов И.Д. и другие. В результате в данный момент существует много модификаций метода прогонки такие как: классическая, потоковая, циклическая, ортогональная, немонотонная прогонки. Все они предназначены для решения систем уравнений, возникающих при аппроксимации краевых задач, и являются модификациями метода классической прогонки, и каждый из них может быть выбран для решения конкретного класса задач.

Численные примеры

1. В качестве численного примера рассмотрим краевую задачу

$$y''(t) - 25y(t) = 0,\ 0 \leq t \leq 1,\ \ y(0) = 1,$$
$$y(1) = 1.$$

В условиях этого примера; $k(t) \equiv 1$, $q(t) \equiv 25$, $f(t) \equiv 0$ $\beta_0 = 1$, $\beta_1 = 1$.

При численном расчете с шагом $N = 100$, по формулам (4)-(6), абсолютная величина наибольшей погрешности равна $\delta = 0.0005$.

2. В качестве следующего примера рассмотрим

$$y''(t) - 100y(t) = 0,\ 0 \le t \le 1,\ y(0) = 1,\ y(1) = 1.$$

Здесь; $k(t) \equiv 1$, $q(t) \equiv 100$, $f(t) \equiv 0$ $\beta_0 = 1$, $\beta_1 = 1$.

При численном расчете с тем же шагом $N = 100$, по формулам (4)-(6), абсолютная величина наибольшей погрешности достигает значение $\delta = 0.0001$.

3. В качестве третьего численного примера рассмотрим

$$y''(t) - 10000y(t) = 0,\ 0 \le t \le 1,\quad y(0) = 1,\ y(1) = 1.$$

Здесь; $k(t) \equiv 1$, $q(t) \equiv 10\,000$, $f(t) \equiv 0$ $\beta_0 = 1$, $\beta_1 = 1$.

При расчете с тем же шагом $N = 1000$, по формулам (4)-(6), абсолютная величина наибольшей погрешности достигает значение $\delta = 0.009$.

Рассмотрение этих и других примеров показывает, что чем больше значение коэффициента уравнение $q(t)$ и/или значения β_0, β_1, параметров на концах интервала для достижения лучшей точности, необходимо уменьшение шага сетки. Здесь высказывается тот факт, что при больших значениях $q(t)$, β_0, β_1 - исходная задача становиться более жестким, при этом решение краевой задачи в окрестности концов изменяется очень быстро и образует «пограничный слой» или «краевой эффект». А внутри отрезка решение изменяется очень медленно, т.е., переходит на «квазистационарный режим».

В подобных случаях, в рамках данного метода можно указать точки перехода шага интегрирования из крупного на малый шаг и обратно. Такая ситуация существенно влияет на точность расчета.

Но в данной работе углубляться в этот вопрос не будем, что может быть предметом дальнейших исследований) так как основной целью данной работы является исследования вопросов численного задачи (1)-(3) в случае, когда $q(t) \le 0$.

Рекуррентные формулы для численного решения краевой задачи (1)–(3) в случае когда $q(t) \le 0$.

Описание алгоритма. Организация прямого хода Счет начнем по формулам

$$a_0 = 0\,, \quad a_n = \frac{a_{n-1}(1+\eta_n)+h}{1+a_{n-1}\mu_n+\eta_n}\,, \qquad v_0 = \beta_0\,,$$

$$v_n = \frac{v_{n-1} - a_{n-1}\sigma_n - \sigma_n'}{1+a_{n-1}\mu_n+\eta_n}\,, \qquad (10)$$

которых для данного случая назовем *формулами прямого хода для отрицательного «входа».*

По этим формулам вычисления ведутся для всех $n = 1,....\theta_1 - 1$, где θ_1, - такой номер шага, где впервые окажется $a_{\theta_1} > 0$, (если такого номера θ_1, не существует, то расчет по формулам (11) будет вестись до правого конца отрезка) и далее полагая,

$$b_{\theta_1} = \frac{1}{a_{\theta_1}}\,,\ \upsilon_{\theta_1} = -\frac{v_{\theta_1}}{a_{\theta_1}} \qquad (11)$$

счет продолжим по следующим формулам, которых назовем формулами прямого хода для положительного «входа»

$$b_n = \frac{b_{n-1}(1+\eta_n)+\mu_n}{1+hb_{n-1}+\eta_n}\,, \ ; \qquad \upsilon_n = \frac{\upsilon_{n-1}+b_{n-1}\sigma_n'+\sigma_n}{1+hb_{n-1}+\eta_n}\,; \qquad n = \theta_1 + 1,....\theta_2.$$

(12)

где θ_2, - такой номер, что для всех $n = \theta_1 + 1,....\theta_2 - 1.$, значения $b_n > 0$, и $b_{\theta_2} < 0$ (если такого номера θ_2, не существует, то расчет по этим формулам будет вестись до правого конца отрезка). Здесь:

$$a_{\theta_2} = \frac{1}{b_{\theta_2}}\,,\ v_{\theta_2} = -\frac{\upsilon_{\theta_2}}{b_{\theta_2}} \qquad (13)$$

Далее, при необходимости вышеописанная процедура повторяется и в следующих возможных точках перехода.

Таким образом, до завершения прямого хода могут быть осуществлены множества переходов, между формулами прямых ходов для отрицательного и положительного «входов». Количество таких переходов зависит от поведение функции $q(t)$.

Если обозначим $\theta_0 = 1$, и θ_k - тот номер, на котором последний раз совершался переход из формул (10) к формулам (12) или наоборот, то множества индексов, представляющие собой «номера шагов перехода» можно обозначить через $\{\theta_0, \theta_1, \theta_2,....\theta_{\mathrm{k}}\}$.

И соответственно, множество индексов от 1 до N, разбиваются на подинтервалы; $[0, \theta_0]$, $[\theta_0+1, \theta_1]$, $[\theta_1+1, \theta_2]$,..... $[\theta_{k-2}+1, \theta_{k-1}]$, $[\theta_{k-1}+1, \theta_k]$, $[\theta_k+1, N]$.

В терминах введенных обозначений можно утверждать, что переход из (10) к (12) и обратно, осуществляется с помощью соотношений $a_{\theta_j} = \dfrac{1}{b_{\theta_j}}$, $v_{\theta_j} = -\dfrac{\upsilon_{\theta_j}}{b_{\theta_j}}$, (или по формулам $b_{\theta_1} = \dfrac{1}{a_{\theta_1}}$, $\upsilon_{\theta_1} = -\dfrac{\nu_{\theta_1}}{a_{\theta_1}}$) здесь θ_j - номер индекса, начиная с которого осуществляется указанный переход ($j = 0, 1, 2, \ldots k.$), где j - номер перехода.

Итак, поочередное использование формул (10) и (12), прямого хода для отрицательного и для положительного «входов», позволяет вести расчет до правого конца рассматриваемого отрезка и тем самым завершить «прямой ход». При этом на последнем отрезке, где ведется прямой ход расчета, то есть на $[\theta_k+1, N]$, возможны следующие два взаимоисключающих случая:

1) расчет ведется по формулам (10) прямого хода для отрицательного «входа».
2) расчет ведется по формулам (12) прямого хода для положительного «входа».

Организация обратного хода

В первом случае, начнем обратный расчет по следующим формулам, которых назовем формулами обратного хода для отрицательного «входа»

$$y_N = \beta_1, \qquad y_{n-1} = \frac{(1+\eta_n)y_n + \nu_n \dfrac{h}{a_n}\left(1+\dfrac{h}{a_n}\right) + \sigma'_n}{(a_n+h)a_n + h^2} a_n^2$$

$n = N, N-1, \ldots \theta_k+2,\ \theta_k+1.$ (14)

Далее, начиная с шага θ_k, продолжим счет, по следующей рекуррентной формуле которого удобно назвать формулой обратного хода для положительного «входа».

$$y_N = \beta_1, \qquad y_{n-1} = \frac{(1+\eta_n)y_n - h\upsilon_n(1+hb_n) + \sigma'_n}{1 + hb_n + (hb_n)^2}$$

$n = \theta_k, \ldots\ldots \theta_{k-1}+2,\ \theta_{k-1}+1.$ (15)

Таким образом, в тех точках, где потребуется переход, чередуются формулы (13)-(14) две формулы «обратных ходов»

Во втором случае, полагается, что $y_N = \beta_1$, и расчет продолжается по формулам (14) то есть, по формулам обратного хода для положительного «входа» от индекса N до индекса $\theta_k + 1$. В остальном процесс вычисления организуется аналогично предыдущему случаю.

Доказательство согласованности. Согласованность рекуррентных формул (10) и (14) с исходной краевой задачей было показано в третьем разделе. Совершенно аналогично показывается согласованность формул (12), (15). А именно, при $h \to 0$ из рекуррентных формул (12), (15) можно получить следующую задачу Коши для трех дифференциальных уравнений первого порядка

$$b'(t) + b^2(t) = q(t) \tag{16}$$

$$\upsilon'(t) + b(t)u(t) = f(t) \tag{17}$$

$$y'(t) - b(t)y(t) = u(t) \tag{18}$$

где последнее уравнение системы интегрируется справа налево.

Если продифференцируем последнее уравнение данной системы и воспользуемся предыдущими двумя уравнениями, то можно получить краевую задачу (1)–(3). Данную систему дифференциальных уравнений можно также получить, произведя в (7)-(9) следующую замену

$$b(t) = \frac{1}{a(t)}, \qquad \upsilon(t) = -\frac{\nu(t)}{a(t)},$$

Или обратно, из (16)-(18) с помощью обратной замены

$$a(t) = \frac{1}{b(t)}, \qquad \nu(t) = -\frac{\upsilon(t)}{b(t)},$$

вернутся к системе (7)–(9).

Тем самым, было показано, что краевая задача (1)–(3) и системы дифференциальных уравнений (14)–(16) имеют одинаковые решение. Краевые условия определяются из приведенных выражений для замены уравнений.

Системы дифференциальных уравнений (19)–(21) и (7)–(9) приводится во многих литературных источниках в частности в книгах (Амосов, 1994).

Исследования вычислительная устойчивость приведенных рекуррентных формул (10), (12), (14), (15) проводится по методологии, описанной в пункте 3.

Численные примеры

1. В качестве численного примера рассмотрим краевую задачу $y''(t) + 49y(t) = 0, \quad 0 \le t \le 1$, $y(0) = -1$, $y(1) = 0$. В условиях этого примера; $q(t) \equiv -49$, $f(t) \equiv 0$ $\beta_0 = -1$, $\beta_1 = 0$. При численном расчете с шагом $N = 100$, по вышеуказанному алгоритму, абсолютная величина наибольшей погрешности равна $\delta = 0.00302$. Такая низкая точность является следствием того, что в этом примере функция $q(t)$ и количество шагов N - величины одного порядка. Тем не менее, такая точность не противоречит гарантируемому первому порядку точности излагаемого метода. А при расчете с шагом $N = 1000$, та же самая погрешность равна $\delta = 0.00006$.

2. В качестве следующего численного примера рассмотрим краевую задачу $y''(t) + 100y(t) = 0, \quad 0 \le t \le 1$, $y(0) = -1$, $y(1) = 0$. В условиях этого примера; $q(t) \equiv -100$, $f(t) \equiv 0$ $\beta_0 = -1$, $\beta_1 = 0$. При численном расчете с шагом $N = 100$, по вышеуказанному алгоритму, абсолютная величина наибольшей погрешности равна $\delta = 0.00724$. А при расчете с шагом $N = 1000$, та же самая погрешность равна $\delta = 0.00009$.

Рекуррентные формулы для численного решения краевой задачи (1) – (3) в случае, когда $q(t)$ является знакопеременной функцией

Так как, в рамках данного алгоритма происходит перенос краевых условии в выбранные узловые точки внутри рассматриваемого отрезка, поэтому на любой из узловых точек $t_k \in [0, 1]$ могут быть реализованы следующие возможные сценарий:

1) $a_{k-1} \ge 0, \; q(t) \ge 0$. В этом случае, может быть применен алгоритм указанный в пункте (3). А также применимы формулы классической прогонки.

2) $a_{k-1} \le 0, \; q(t) \ge 0$. Тогда, если $|a_{k-1}| \le |\sqrt{q_k}|$, то начиная с — шага k счет ведется слева направо по формулам (12), но если $|a_{k-1}| > |\sqrt{q_k}|$, то по формулам (10). В рамках вышеуказанных условий, как следует из дифференциального аналога этих формул (формулы (7), (19)) происходит резкий монотонный рост значений a_n и b_n, и в результате за «малое» количество шагов они становятся положительными. И значит, для формул (10), (12) условие устойчивости нарушается только на «малом» количестве

шагов, что не влияет на результаты конечного счета. Обратный счет по этим формулам осуществляется, как указано в пункте (4).

3) $a_{k-1} > 0,\ q(t) \leq 0$. Расчет происходит по алгоритму, изложенному в пункте (4).

4) $a_{k-1} > 0,\ q(t) \leq 0$. Расчет происходит по алгоритму, изложенному в пункте (4).

Заключение

В данной работе предложены рекуррентные формулы для численного решения краевой задачи (1)-(3), которые имеют более широкую область применимости, чем метод прогонки, при решении краевых задач дифференциальных уравнений второго порядка. Формулы применимы вне зависимости от знака коэффициента $q(t)$ при решении $y(t)$. Результаты, полученные в данной статье, подтверждаются расчетными данными. Приведенной метод имеет первый порядок точности и является абсолютно устойчивым, то есть его устойчивость не зависит от величины шага h. Ради строгости изложения исходная задача сформулирована при условии, что коэффициенты уравнения являются непрерывными функциями. Тем не менее, один из далеко идущих целей данной работы является изложение одношагового численного метода решения краевой задачи (1)-(3), при минимальных требованиях на условия гладкости коэффициентов уравнения Поэтому, акцент данной работы делается на вывод рабочих рекуррентных формул предоставлющих возможности работы с уравнениями с разрывными (т.е. кусочно-непрерывными) коэффициентами и в ряде случаев с коэффициентами, имеющими интегрируемые особенности. Возможности современных ЭВМ позволяет работать при достаточно малых шагах h, и тем самым методы первого порядка точности могут быть вполне пригодным рабочим инструментом обеспечивающих необходимую точность для численного решения большинства практических задач.

Повышения порядка точности метода предпологает существование более ограничительных условий на коэффициенты исходной краевой задачи. Если все же возникает необходимость повышения точности решения, то может быть использован метод Рунге повышения точности или другие общеизвестные методы.

2. Изложенный алгоритм может иметь хорошие перспективы для распараллеливания счета. Есть возможность обобщить идей метода изложенного в настоящей работе на другие типы краевых условий, а также для краевых задач для дифференциальных уравнений более высоких порядков. После небольшой модификаций представленный здесь метод может быть использован и для численного решения линейных уравнений частных производных. Ради справедливости хотелось бы отметить, что

первоначальная идея вышеизложенного метода принадлежит Отелбаеву М.О. (Утемаганбетов, 1995) и получила развитие в работах (Utemaganbetov, 2013; Utemaganbetov, 2014; Утемаганбетов, 2015).

Недостатки и преимущества излагаемого здесь метода, могут быть выяснены на основе практики применения этого метода специалистами по вычислительной математике.

REFERENCES

Amosov A.A., Dubinsky Yu.A., Kopchenova N.V., 1994 — Computational methods for engineers. M.: "Higher School". 1994.

Babenko K.I., 2002 — Fundamentals of numerical analysis. //Moscow-Izhevsk: SIC "Regular and chaotic dynamics", 2002.

Bakhvalov N.S., 1973 — Numerical methods. - M.: Nauka, 1973. – 654 p.

Ilyin V.P., Kuznetsov Yu.I.6 1985 — Tridiagonal matrices and their applications. - M.: Nauka, 1985.

Kalitkin N.N., Alshina E.A., 2013 — Numerical methods. Book 1, Numerical analysis. Moscow: Publishing Center "Academy", 2013. - 304 p. - (University textbook. Applied Mathematics and Computer Science series).

On Ts. Computational methods for solving applied boundary value problems: Trans. from English—M.: Mir, 19827 -296 p

Utemaganbetov Z.S., Otelbaev M.O., 1995 — On a numerical method for solving boundary value problems for second-order differential equations. // In the book: Topical issues of mathematics and methods of teaching mathematics. (part II) Almaty, 1995.

Utemaganbetov Z.C., 2013 — Alternative and Expanded Version of the Sweep Method for the Numerical Solution of the First Boundary Value Problem for Second-Order Linear Differential Equations. Life Science Journal 2013; 10 (12p). Pp 603–611.

Utemaganbetov Z.C. Diyarova L.D., Nigmetova. G.N., 2014 — Alternative and Expanded Version of the Sweep Method for the Numerical Solution of the Second and Third Boundary Value Problem for Second-Order Linear Differential Equations (printed). Life Science Journal 2014; 11(8p)

Utemaganbetov Z.S., Nigmetova G.N., Urbisinova B.T., 2015 — Method of transferring boundary conditions for numerical solution of the 1st boundary value problem for linear differential equations of the second order Bulletin of KazNTU Series of Physics and Mathematics, № 5, 2015. Pp. 493–501.

МАЗМҰНЫ

ФИЗИКА

ХИМИЯ

СОДЕРЖАНИЕ

ФИЗИКА

ХИМИЯ

CONTENTS

PHYSICAL SCIENCES

CHEMISTRY

Publication Ethics and Publication Malpractice in the journals of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan

For information on Ethics in publishing and Ethical guidelines for journal publication see http:// www.elsevier.com/publishingethics and http://www.elsevier.com/journal-authors/ethics.

Submission of an article to the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan implies that the work described has not been published previously (except in the form of an abstract or as part of a published lecture or academic thesis or as an electronic preprint, see http://www.elsevier. com/postingpolicy), that it is not under consideration for publication elsewhere, that its publication is approved by all authors and tacitly or explicitly by the responsible authorities where the work was carried out, and that, if accepted, it will not be published elsewhere in the same form, in English or in any other language, including electronically without the written consent of the copyright-holder. In particular, translations into English of papers already published in another language are not accepted.

No other forms of scientific misconduct are allowed, such as plagiarism, falsification, fraudulent data, incorrect interpretation of other works, incorrect citations, etc. The National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan follows the Code of Conduct of the Committee on Publication Ethics (COPE), and follows the COPE Flowcharts for Resolving Cases of Suspected Misconduct (http:// publicationethics.org/files/u2/New_Code.pdf). To verify originality, your article may be checked by the originality detection service Cross Check http://www.elsevier.com/editors/plagdetect.

The authors are obliged to participate in peer review process and be ready to provide corrections, clarifications, retractions and apologies when needed. All authors of a paper should have significantly contributed to the research.

The reviewers should provide objective judgments and should point out relevant published works which are not yet cited. Reviewed articles should be treated confidentially. The reviewers will be chosen in such a way that there is no conflict of interests with respect to the research, the authors and/ or the research funders.

The editors have complete responsibility and authority to reject or accept a paper, and they will onh accept a paper when reasonably certain. They will preserve anonymity of reviewers and promote publication of corrections, clarifications, retractions and apologies when needed. The acceptance of a paper automatically implies the copyright transfer to the National Academy of sciences of the Republic of Kazakhstan.

The Editorial Board of the National Academy of sciences of the Republic of Kazakhstan will monitor and safeguard publishing ethics.

Правила оформления статьи для публикации в журнале смотреть на сайте:

www:nauka-nanrk.kz

ISSN 2518-1483 (Online), ISSN 2224-5227 (Print) http://reports-science.kz/index.php/en/archive

Заместитель директор отдела издания научных журналов НАН РК *Р. Жәлиқызы*

Редакторы: *М.С. Ахметова, Д.С. Аленов*

Верстка на компьютере *Г.Д. Жадырановой* Подписано в печать 30.06.2023.

Формат 60x88$^{1}/_{8}$. Бумага офсетная. Печать - ризограф. 22,0 п.л. Тираж 300. Заказ 2.

Национальная академия наук РК

050010, Алматы, ул. Шевченко, 28, т. 272-13-19